$\mathbb{TFJM}^2$

Problèmes du 10ème Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION 1.1 MISE À JOUR LE 23 JANVIER 2020

Préambule

Ces problèmes sont proposés dans le cadre du Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens. Ce sont des problèmes difficiles, proposés par des chercheur·se·s et étudiant·e·s en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète, mais sont accessibles à des lycéen·ne·s, c'est-à-dire que les auteur·e·s sont certain·e·s qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des participant·e·s qu'elles/ils résolvent entièrement un problème, mais qu'elles/ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

 En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site `www.tfjm.org` ou contacter les organisateur·rice·s à l'adresse `contact@tfjm.org`.

Table des matières

MOTS-CLÉS : 1. pavage, combinatoire — 2. optimisation, géométrie — 3. jeux, optimisation — 4. jeux — 5. géométrie — 6. graphes — 7. géométrie, analyse — 8. graphes, arithmétique.

Notations

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$	ensemble des entiers naturels non nuls
$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	ensemble des entiers relatifs
$[a, b]$, $]a, b[$	intervalle respectivement fermé et ouvert de $\mathbb{R}$
$\lfloor x \rfloor$	plus grand entier inférieur ou égal à x
$\lceil x \rceil$	plus petit entier supérieur ou égal à x
$[\![a, b]\!] = \{a, a+1, \cdots, b-1, b\}$	ensemble des entiers entre a et b
$[\![a, b]\!]^2$	ensemble des couples d'entiers entre a et b

1. Création de puzzles

Laetitia est une experte en jeu de grilles. Pour changer du Sudoku, elle crée des puzzles.

Dans une grille $k \times n$ dont les lignes sont numérotées de 1 à k et les colonnes de 1 à n avec $k \geqslant 2$, elle positionne (horizontalement ou verticalement) des dominos rectangulaires de taille $k \times 1$. Les dominos ne peuvent pas se chevaucher et ne doivent pas dépasser de la grille. Ainsi la figure 1 ne représente pas une grille valide car le domino orange dépasse de la grille, et les dominos bleus et verts se superposent.

Ensuite, le joueur doit essayer de compléter la grille, toujours avec des dominos $k \times 1$ et en respectant les mêmes règles.

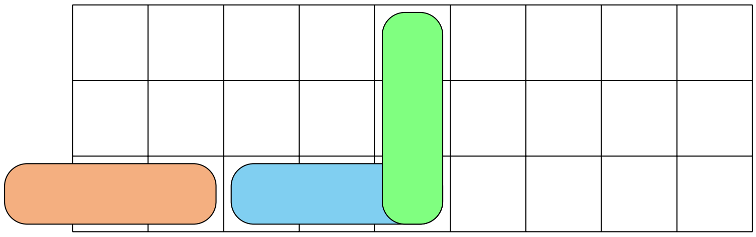

FIGURE 1. Un exemple de grille non valide avec $k = 3$, $n = 9$.

La figure 2 montre un exemple de grille sur laquelle Laetitia a posé deux dominos. Cette grille peut être complétée de trois manières différentes : l'une d'entre elles est illustrée en pointillés.

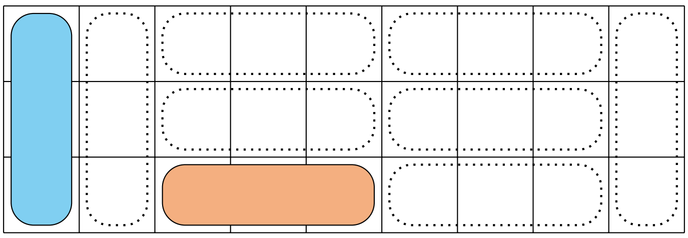

FIGURE 2. Un exemple de grille valide avec $k = 3$, $n = 9$.

1. Laetitia décide de laisser libre au moins un carré de taille $k \times k$ et de faire en sorte qu'il soit possible de compléter la grille. Est-il certain, quelles que soient les positions des pièces posées et quelle que soit la position de ce carré dans la grille, qu'il y aura au moins deux manières de compléter la grille ? Si non, pour quelles valeurs de n et de k peut-il n'y en avoir qu'une seule ?

2. Soient k et n deux entiers fixés. Combien Laetitia doit-elle placer de dominos au minimum pour que le joueur ne puisse compléter la grille que d'une seule manière ?

3. Soient k et n deux entiers fixés. Combien Laetitia peut-elle placer de dominos au maximum pour que le joueur puisse compléter la grille d'au moins deux manières ?

À partir de maintenant, la grille est de taille $n \times n$, et $k \geqslant 2$ est un diviseur de n.

4. Reprendre les questions précédentes dans ce cas.

5. Laetitia colorie les cases de la grille dont les deux coordonnées sont des multiples de k. Elle s'impose de positionner l'extrémité d'un domino sur chacune de ces cases, comme illustré par la figure 3. Pour quelles valeurs de n et k peut-elle faire en sorte qu'il y ait plusieurs manières de compléter la grille ?

6. Laetitia colorie de nouveau les mêmes cases et positionne un domino sur chacune mais, cette fois, elle ne s'impose pas que ce soit une extrémité qui recouvre la case. Pour quelles valeurs de n et k peut-elle faire en sorte qu'il y ait plusieurs manières de compléter la grille ?

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

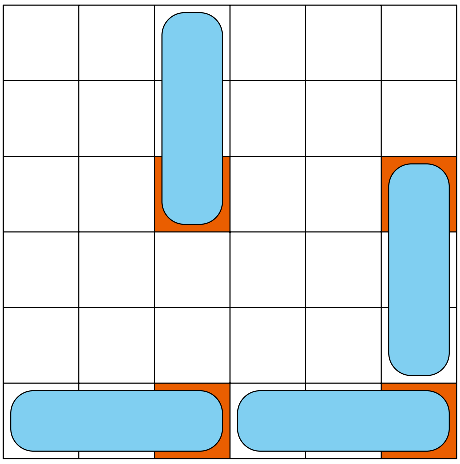

FIGURE 3. Un exemple de grille que peut proposer Laetitia pour $k = 3$, $n = 6$.

* * *

2. Départ en vacances

Pauline cherche à ranger ses affaires dans le coffre de sa voiture avant de partir en vacances.

Elle dispose pour cela d'un coffre qui est un carré de côté réel L, ainsi que de n valises qui sont des rectangles d'une certaine hauteur et largeur réelle, et initialement placés de sorte que la hauteur de chaque valise soit parallèle au même côté du carré.

Un remplissage *parfait* du coffre est une disposition d'un certain nombre de valises qui ne se superposent pas dans le coffre de sorte qu'aucune valise n'ait été tournée. Un remplissage *à rotation près* est une disposition de valises qui ne se superposent pas dans le coffre de sorte que chaque valise ait subi une rotation d'un quart de tour ou n'ait pas été tournée.

Dans la figure 4 on observe trois remplissages d'un coffre de côté 5×5 avec des valises de dimensions respectives 1×3, 2×2 et 3×1. On observe un remplissage parfait et à rotation près à gauche, un remplissage à rotation près à droite et un remplissage qui n'est pas valide au centre car deux valises se superposent et une valise dépasse du coffre.

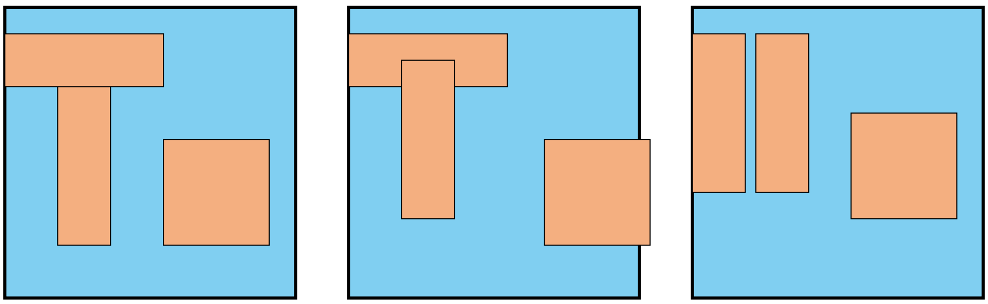

FIGURE 4. Trois exemples de remplissages avec $n = 3$ valises

1. Quelle est la longueur L minimale nécessaire pour obtenir un remplissage parfait avec n valises carrées de côté 1 ? On commencera par étudier les cas où $n \leqslant 10$.

2. Quelle est la longueur L minimale nécessaire pour obtenir un remplissage parfait avec n valises rectangulaires de longueur 1 et hauteur h pour un certain h fixé ?

3. Même question, mais pour un remplissage à rotation près. On commencera par étudier le cas où $h = 2, 3$ puis le cas où h est un entier quelconque et enfin le cas où h est un réel quelconque.

4. Soit n un entier. Pauline dispose d'un coffre de côté L et prend n valises d'aire 1 dont elle choisit les hauteurs et longueurs. Ensuite son ami Franck choisit d'en tourner certaines d'un quart de tour pour l'embêter. Pauline doit obtenir un remplissage parfait de son coffre de côté L quelles que soient les valises tournées par Franck. Quel est le plus petit L tel qu'il existe un choix de valises pour Pauline pour lequel cela est possible quelles que soient les valises retournées par Franck ? On commencera par étudier les cas où $n \leqslant 6$.

Un coffre de côté L et un ensemble de n valises sont dits compatibles si l'aire du coffre est égale à la somme des aires des valises, et si les hauteurs et longueurs des valises ne dépassent pas L.

Pour un coffre et un ensemble de valises compatibles un remplissage utilisant une partie des valises a pour *efficacité* le rapport $\frac{A}{L^2}$ où A est l'aire totale des valises utilisées pour le remplissage et L la longueur du côté du coffre.

5. Quel est le plus grand réel $0 \leqslant x \leqslant 1$ tel qu'il soit toujours possible d'obtenir une efficacité au moins égale à x pour n'importe quel coffre et ensemble de valises compatibles avec un remplissage parfait ? Même question pour un remplissage à rotation près.

6. Pauline dispose de n valises de taille $1 \times h$ avec h un réel fixé. Cependant, son ami Franck veut lui jouer un tour et il a tourné certaines valises. De quelle taille de coffre minimale L Pauline aura-t-elle besoin pour être certaine de pouvoir obtenir un remplissage parfait ? On commencera par étudier le cas $h = 2, 3$ puis le cas h entier, et enfin le cas h quelconque.

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

3. UN FESTIN STRATÉGIQUE

Lily et Hadrien se retrouvent pour un festin, et ils veulent tous les deux manger le plus possible.

Une pizza est découpée en n parts, et chacune a un certain poids qui est un réel positif ou nul correspondant à la quantité de garniture sur la part. On note S la somme de tous les poids, que l'on suppose strictement positive.

Lily commence par prendre la part de son choix. Ensuite, à tour de rôle en commençant par Hadrien, les deux amis prennent une part parmi les deux qui sont voisines d'une part déjà prise jusqu'à ce qu'il ne reste plus de pizza. Le *gain* d'un joueur est la somme des poids de ses parts, divisé par S.

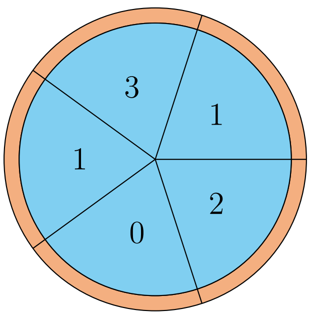

FIGURE 5. Un exemple de pizza à $n = 5$ parts et de poids total $S = 7$.

Avec par exemple la pizza illustrée sur la figure 5, Lily peut commencer par prendre la part de poids 3. Dans ce cas, Hadrien peut prendre une des deux parts de poids 1, par exemple celle de droite. Ensuite Lily peut prendre la part de poids 2 puis Hadrien l'autre de poids 1 et enfin Lily finit en prenant la part de poids 0. Dans ce cas le gain de Lily est de $\frac{3+2+0}{S} = \frac{5}{7}$.

Étant donné une répartition des poids sur la pizza, on note $g_{\max}$ le plus grand gain que Lily peut s'assurer à coup sûr quelle que soit la manière de jouer de Hadrien.

Néanmoins, elle décide parfois de moins réfléchir et de jouer de la manière suivante : elle prend la part la plus lourde au premier tour, puis à chaque étape la part la plus lourde parmi les deux parts qu'elle peut prendre. Lorsqu'il y a une égalité elle peut choisir la part qu'elle souhaite. Le gain maximal qu'elle peut s'assurer en suivant ces règles est noté g_{glouton}. En particulier, $g_{\max} \geq g_{\text{glouton}}$.

1. Lorsque $n = 2, 3, 4, 5$, quelles sont les valeurs possibles de $g_{\max}$?

2. Pour quels entiers n peut-on avoir $g_{\max} > g_{\text{glouton}}$, c'est-à-dire qu'il existe une stratégie strictement meilleure que toute stratégie gloutonne ?

3. Pour quels entiers n a-t-on nécessairement $g_{\max} \geq \frac{1}{2}$?

4. Soit n un entier. Encadrer aussi précisément que possible la plus petite valeur possible pour $g_{\max}$.

À partir de maintenant, Lily et Hadrien jouent sur un brownie carré, découpé en $n \times n$ parts carrées. En commençant par Lily, chacun peut à son tour prendre une part si au moins deux de ses bords sont libres.

5. Des bougies sont posées sur une part sur deux (dans le cas où n est impair, il peut y avoir $\lceil \frac{n^2}{2} \rceil$ ou $\lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$ bougies). Combien Lily peut-elle s'assurer d'obtenir de parts contenant des bougies ?

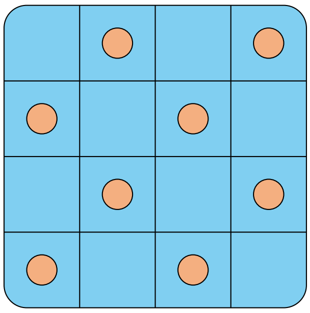

FIGURE 6. Un Brownie découpé en 4×4 parts, avec 8 bougies

6. Hadrien possède k bougies, avec $k \leq n^2$ et peut les placer où il le souhaite avant le début de la partie. Selon les valeurs de k et n, combien Lily peut-elle s'assurer d'obtenir de parts contenant des bougies ?

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

4. Sauver les meubles

Olivier essaie de coincer des meubles dans l'entrepôt d'Animath, mais Chloé cherche à les défendre.

Soit $d \geqslant 2$ un entier. On considère des meubles de taille $1 \times d$ et $d \times 1$ que l'on stocke dans un entrepôt.

1. On se place dans un entrepôt de taille $(d+1) \times (d+1)$. L'entrepôt est dit *rempli* si on ne peut pas placer de nouveau meuble comme illustré sur la figure 7. Quel est le nombre minimal de meubles nécessaire pour qu'un entrepôt soit rempli ? Combien peut-il y avoir de meubles au maximum ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On considère un entrepôt de taille $1 \times n$. Olivier et Chloé agissent tour à tour de la façon suivante :

— à son tour, Olivier pose un meuble dans l'entrepôt si cela est possible.

— à son tour, Chloé peut déplacer horizontalement un meuble de son choix.

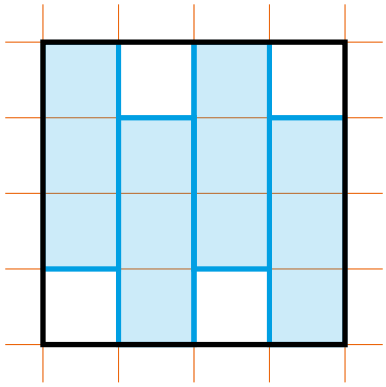

Figure 7. Un entrepôt 4×4 rempli pour $d = 3$

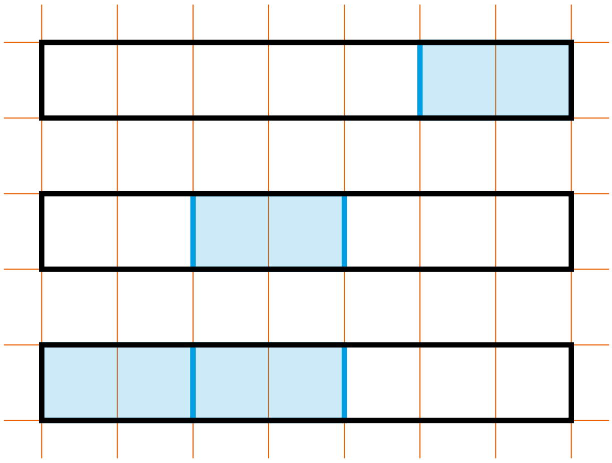

Figure 8. Un exemple de partie dans un entrepôt de longueur $n = 7$ avec $d = 2$.

Un meuble ne peut être déplacé par Chloé que sur des emplacements vides, et ne peut pas traverser un autre meuble lors d'un déplacement. Un meuble est dit *coincé* lorsque Chloé ne peut pas le déplacer.

Olivier gagne si à un moment de la partie un meuble est coincé. Il perd s'il ne peut pas placer de meuble.

La figure 8 montre un exemple de partie. Olivier place un meuble tout à droite, puis Chloé le déplace de trois cases vers la gauche. Olivier place alors un meuble tout à gauche. Il a gagné car le meuble tout à gauche est coincé.

2. Soient n et d fixés, Olivier peut-il s'assurer de gagner ? On commencera par les cas $d = 2, 3$.

Après une courte rénovation, l'entrepôt est maintenant une bande infinie de largeur 1. Chloé gagne si elle parvient à faire durer indéfiniment la partie, c'est à dire s'il n'y a jamais de meuble coincé.

3. Pour quels entiers d Olivier peut-il s'assurer de gagner ? On commencera par les cas $d = 2, 3$.

Après une rénovation à peine plus longue, l'entrepôt est maintenant un plan infini. Chloé ne peut déplacer les meubles que dans le sens de leur plus long côté. Par exemple dans la figure 9, à gauche, si c'est le tour de Olivier, il peut gagner en plaçant un meuble collé à l'extrémité gauche du meuble horizontal. Mais si c'est le tour de Chloé, elle peut l'empêcher de gagner à ce tour, par exemple en déplaçant le meuble horizontal d'une case vers la gauche, donnant la figure à droite.

4. Pour quels entiers d Olivier peut-il s'assurer de gagner ? On commencera par les cas $d = 2, 3$.

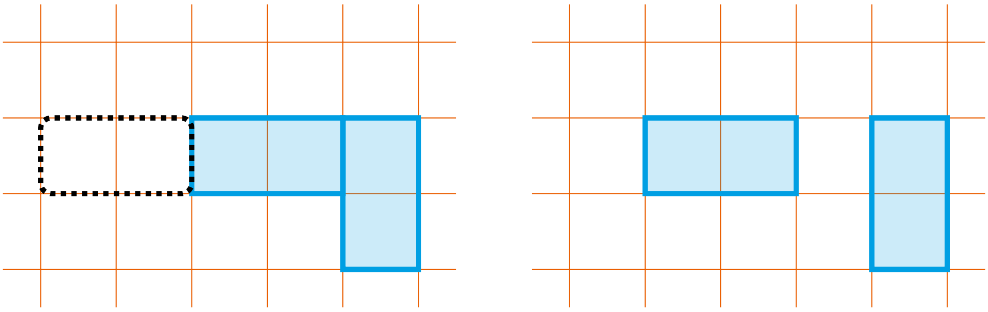

Figure 9. Deux configurations de meubles dans l'entrepôt en deux dimensions pour $d = 2$.

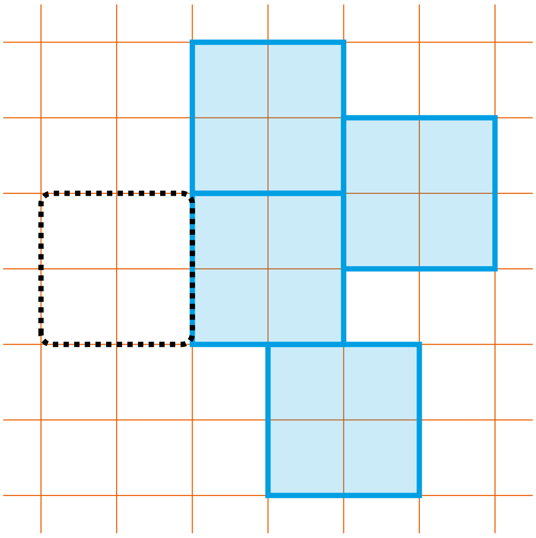

Figure 10. Une configuration avec les nouveaux meubles.

5. Pour faire face à la diversification de ses activités, Animath a désormais besoin de meubles de longueurs variées (au moins 2) et toujours une largeur 1. Reprendre la question précédente si :

a) à chaque tour, Olivier choisit la taille du meuble qu'il va poser ;

b) à chaque tour, Chloé choisit la taille du meuble que va poser Olivier ;

c) au début de la partie, Olivier choisit la suite des tailles de meubles qu'il va poser ;

d) au début de la partie, Chloé choisit la suite des tailles de meubles que va poser Olivier ;

Les meubles nouvelle génération sont de taille $d \times d$ et peuvent se déplacer dans les deux directions. Dans la figure 10, si c'est au tour d'Olivier, il peut gagner en plaçant par exemple le meuble en pointillés.

6. Reprendre les questions précédentes dans ce cas.

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

5. Prêt à décoller ?

Julien souhaite décoller une étiquette récalcitrante, de forme polygonale.

Il dispose pour cela d'une règle de longueur 1, qu'il va utiliser pour décoller successivement des petits bouts triangulaires. Pour décoller un bout triangulaire, il doit choisir deux points, à distance au plus 1 l'un de l'autre, et situés sur des côtés adjacents formant un angle aigu ou droit. Le triangle décollé doit être entièrement contenu dans ce qu'il reste de l'étiquette.

Par exemple, si l'étiquette est le pentagone représenté figure 11, alors il peut positionner sa règle sur l'un des deux traits oranges pleins, mais il ne peut pas positionner sa règle sur les segments en pointillés : celui de gauche est trop long, celui de droite relie deux côtés qui ne touchent pas le même sommet, et celui du haut relie deux côtés qui forment un angle obtus. Si Julien décolle l'étiquette en plaçant sa règle sur le segment plein à gauche, alors il obtient l'étiquette à six côtés représentée plus bas.

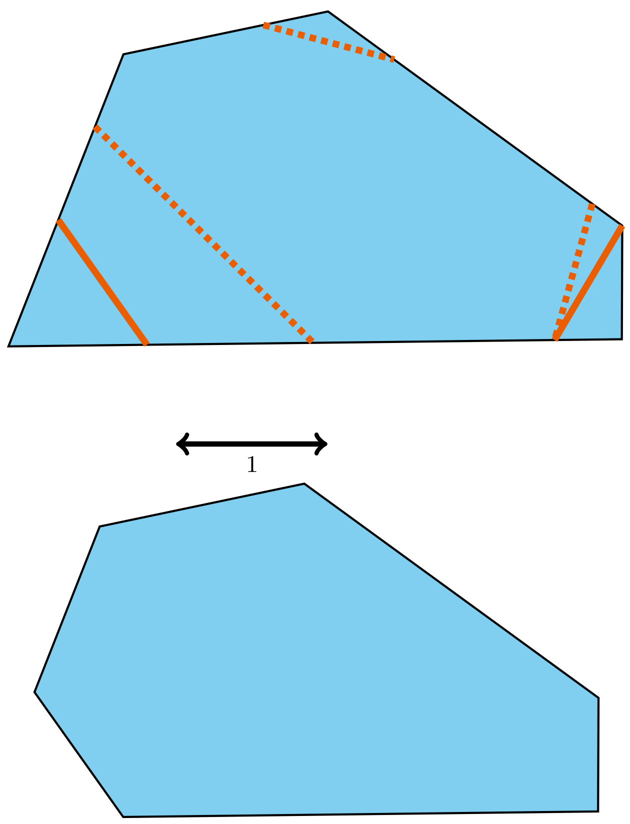

FIGURE 11. Un exemple de décollage d'une étiquette à 5 côtés.

Julien s'arrête lorsqu'il a pu décoller toute l'étiquette, c'est-à-dire qu'il ne reste plus qu'un triangle avec un angle aigu et son côté opposé de longueur inférieure à 1, ou s'il ne peut plus rien décoller, c'est à dire que tous les angles de l'étiquette sont obtus. Dans le premier cas, on dit que étiquette initiale est *entièrement décollable*.

1. Existe-t-il un polygone à n côtés entièrement décollable pour les valeurs suivantes de n :

a) $n = 3$ ou $n = 4$?

b) $n = 5$?

c) $n \geqslant 6$?

2. On s'intéresse maintenant à des polygones particuliers.

a) Pour quelles valeurs de c un carré de côté c est-il entièrement décollable ?

b) Pour quelles valeurs de c un triangle équilatéral de côté c est-il entièrement décollable ?

c) Pour quelles valeurs de c est-ce que pour tout $a > 0$, le rectangle $c \times a$ est-il entièrement décollable ?

3. Un quadrilatère les côtés sont tous plus petits que 1 est-il toujours entièrement décollable ?

4. Existe-t-il un réel $R > 0$ tel que tout polygone qui contient un disque de rayon R ne soit pas entièrement décollable ?

5. Reprendre les questions précédentes où l'on remplace la contrainte sur l'angle par le fait qu'il doit être inférieur ou égal à un certain angle fixé α (les questions précédents correspondent au cas $\alpha = 90$ degrés).

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

6. Ils nous espionnent !

Winston est commissaire de Police. Il cherche à capturer un voleur à l'aide de ses nouveaux drones.

La ville où travaille Winston est composée de quartiers, et certains quartiers sont reliés entre eux par des routes à double sens. Winston possède un nombre illimité de drones et n agents de police.

Un premier jour à minuit, un voleur apparaît dans un quartier de la ville, mais Winston ne sait pas lequel.

- Chaque matin, il choisit autant de quartiers qu'il le souhaite, dans lesquels il envoie un drone.
- À midi, sa montre sonne si un de ses drones a été envoyé dans le quartier où est caché le voleur. Cependant il ne sait pas lequel de ses drones a détecté le voleur.
- L'après-midi, Winston peut envoyer ses agents dans au plus n quartiers. Cependant, pour faire cela il doit être certain qu'au moins l'un de ses agents va se rendre dans le quartier où se cache le voleur pour l'arrêter. Si Winston ne peut pas arrêter le voleur avec certitude il n'envoie pas ses agents.
- Enfin, chaque nuit excepté la première, le voleur se déplace d'un quartier en suivant une route.

On suppose dans un premier temps que le voleur ne peut pas rester dans le même quartier deux jours consécutifs.

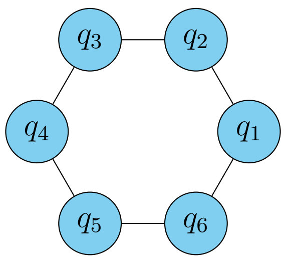

Figure 12. Une carte de la ville de Londres avec $N = 6$ quartiers

1. La ville de Londres est composée de N quartiers $q_1, q_2, \cdots, q_N$ disposés en cercle, avec des routes reliant les sommets voisins sur le cercle, comme dans la figure 12. En fonction de N, pour quels nombres n d'agents Winston peut-il arrêter le voleur avec certitude après un certain nombre de jours ?

2. Soient N et n deux entiers tels que Winston peut s'assurer de capturer le voleur. Combien de jours lui faut-il au minimum pour être certain de le capturer ?

3. On dit qu'une ville n'a pas de boucle s'il n'existe pas d'entier $b \geqslant 3$ et de quartiers distincts $q_1, q_2, \cdots, q_b$ tels qu'il y ait une route entre q_i et q_{i+1} pour $1 \leqslant i < b$ et entre q_1 et q_b. Par exemple, Londres a une boucle de taille $b = N$. Quel est le plus petit nombre n d'agents suffisant pour pouvoir attraper le voleur dans n'importe quelle ville qui n'a pas de boucle ?

4. La ville de New-York est une grille carrée de côté N. De combien d'agents Winston a-t-il besoin au minimum pour attraper le voleur ?

5. Une ville est dite planaire si, dessinée dans le plan, les routes ne se croisent pas. Par exemple la figure 13 représente une ville planaire, mais si on ajoute une route entre q_1 et q_4 elle ne pourra plus être planaire. Soit n un entier. Existe-t-il une ville telle que Winston ne peut pas capturer le voleur à l'aide de n agents ? Existe-t-il une telle ville planaire ?

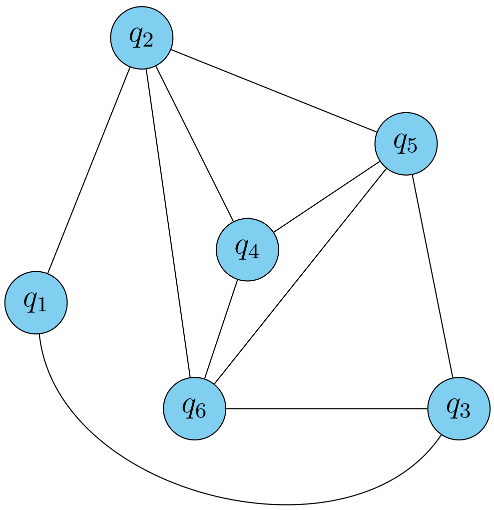

Figure 13. Une carte de ville planaire

6. Suite à des réductions budgétaires, Winston peut à présent envoyer uniquement un nombre de drones entre 1 et d chaque jour, pour un certain entier d fixé. Reprendre les questions précédentes dans ce cas.

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

7. De joyeux bûcherons

Deux bûcherons essaient de déplacer des souches et des troncs dans une forêt.

La forêt de Chambord vue du haut est un plan infini dans lequel chaque point à coordonnées entières est un arbre ponctuel. Les bûcherons déplacent un objet, en lui appliquant une des deux opérations suivantes.

— (Translation) Choisir un vecteur $\vec{v}$ et appliquer à leur objet une translation de vecteur $\vec{v}$.

— (Rotation) Fixer un point O de l'objet, choisir un angle $\theta \in [0, \pi]$ et appliquer à leur objet une rotation de centre O et d'angle θ dans le sens direct ou indirect.

Ce n'est possible que si l'objet ne rencontre pas d'arbre sur son passage, c'est à dire :

— (Translation) Il n'existe pas de réel $0 \leqslant t \leqslant 1$ tel que l'objet translaté par un vecteur $t\vec{v}$ touche un arbre.

— (Rotation) Il n'existe pas d'angle $0 \leqslant \phi \leqslant \theta$ tel que si on applique une rotation de centre O d'angle ϕ dans le sens direct ou indirect (selon le sens de la rotation choisie) à l'objet, il touche un arbre.

1. Avant de se rendre dans la forêt, les bûcherons s'exercent dans un petit bosquet constitué d'un nombre fini d'arbres disposé de manière quelconque. L'objet qu'ils transportent est un *tronc fin* de longueur L, c'est à dire un segment de longueur L ouvert (les deux extrémités peuvent toucher les arbres). Étant donné deux positions possibles pour ce tronc, est-il toujours possible pour les bûcherons de le déplacer d'une position à l'autre ? Si oui, comment ?

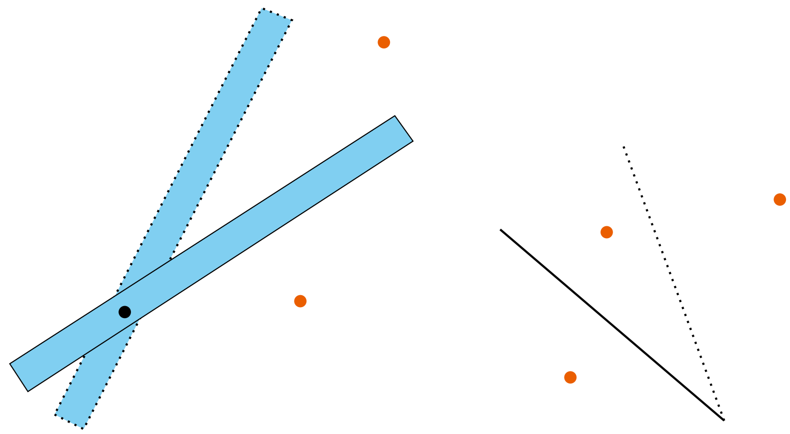

FIGURE 14. Une rotation autorisée d'un tronc épais et une rotation interdite d'un tronc fin dans un bosquet.

On dit qu'un objet est libre si, pour toute position initiale et pour toute position finale qui ne rencontrent pas d'arbres, les bûcherons peuvent déplacer l'objet de l'une à l'autre.

Les bûcherons travaillent à présent dans la forêt de Chambord.

2. Ils cherchent à déplacer une souche, qui est un disque de rayon r_0 ouvert (le bord du disque peut toucher les arbres). Pour quels rayons r_0 la souche est-elle libre ?

3. Ils cherchent à déplacer un tronc fin de longueur L. Pour quelles longueurs L le tronc fin est-il libre ?

4. Ils cherchent à déplacer un tronc épais, à savoir un rectangle ouvert (les côtés du rectangle peuvent toucher les arbres) $E \times L$ avec $0 < E \leqslant L$. Pour valeurs de E et L le tronc épais est-il libre ?

Le temps total nécessaire pour effectuer une suite d'opérations est la distance parcourue par un point particulier de l'objet en question qui sera appelé centre de l'objet.

5. Quel le temps minimal nécessaire pour déplacer, lorsque cela est possible :

— Une souche de rayon r_0 centrée au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vers une position où elle est centrée en $(n + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$, avec n, m entiers ? Le centre de la souche est le centre du disque.

— Un tronc fin de longueur L vers la même position après avoir effectué un demi-tour ? Le centre du tronc est le milieu du segment.

— Un tronc épais de longueur L et épaisseur E vers la même position après avoir effectué un demi-tour ? Le centre du tronc est l'intersection des diagonales du rectangle.

On cherchera à encadrer ces quantités aussi précisément que possible.

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

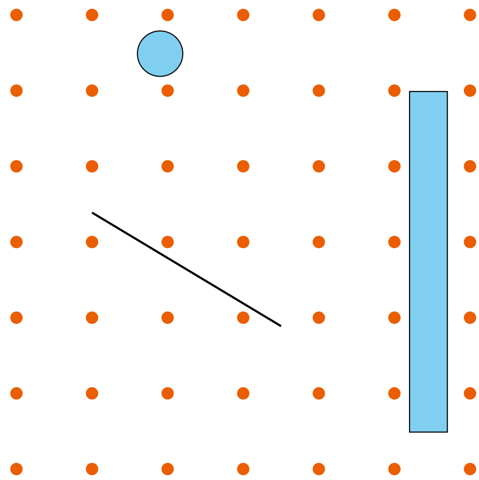

Figure 15. La forêt de Chambord, avec une souche, un tronc fin et un tronc épais

8. Robots auto-réplicateurs

Dans la galaxie TF-J-1000, la technologie est bien plus avancée que dans la nôtre : des robots auto-réplicateurs ont été mis au point, et ils se propagent de planète en planète.

La galaxie est constituée d'un ensemble de planètes. Chacune peut être atteinte depuis certaines autres et, tous les siècles, chaque robot produit un robot pour chaque planète accessible depuis sa planète avant d'expédier les nouveaux robots et de s'autodétruire.

Un exemple d'évolution du nombre de robots dans une galaxie est donné par la figure 16. Dans cette exemple la planète en haut à droite est accessible depuis la planète en haut à gauche, mais pas l'inverse.

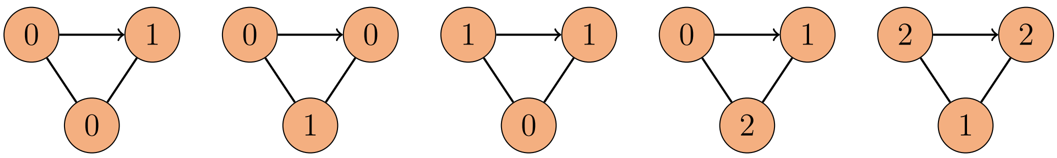

Figure 16. Exemple d'évolution du nombre de robots des siècles 0 à 4 dans une galaxie comportant 3 planètes.

1. On suppose que la galaxie est constituée d'une planète pour chaque nombre de $\mathbb{Z}$, et chaque planète est accessible depuis ses deux voisines. Au départ, il y a un unique robot en 0. Combien y a-t-il de robots actifs sur la planète k au siècle s ?

2. Reprendre la question précédente si la galaxie a une planète pour chaque élément de $\mathbb{Z}^2$, et chaque planète est accessible depuis ses quatre voisines.

3. Reprendre la question précédente si la galaxie a une planète pour chaque élément de $[\![1, p]\!]$, et chaque planète est accessible depuis sa ou ses voisines. Le robot initial peut être sur n'importe quelle planète. On pourra se limiter aux cas $p = 3, 4, 5$, et éventuellement 6.

Soit $g \in \mathbb{N}^*$. On suppose désormais que, si au moins g robots se trouvent en même temps sur une même planète, une guerre se déclare et g des robots sont détruits. Plus généralement, pour tout k, s'il y en a plus de kg, alors kg sont détruits, de sorte que seulement le reste de la division euclidienne du nombre de robots par g demeurent et peuvent s'auto-répliquer.

On suppose également que la galaxie ne contient qu'un nombre fini de planètes.

Une galaxie est dite *impropice* lorsque, quelle que soit la répartition initiale des robots, ils finiront par tous disparaître.

4. Dans cette question uniquement, on suppose $g = 2$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

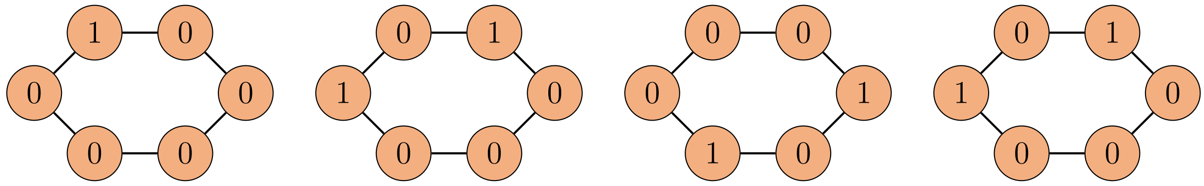

FIGURE 17. Exemple d'évolution du nombre de robots des siècles 0 à 3 dans une galaxie comme dans la question 4a), avec $p = 6$. On constate que, pour cette répartition initiale, il y aura toujours des robots : la galaxie n'est donc pas impropice.

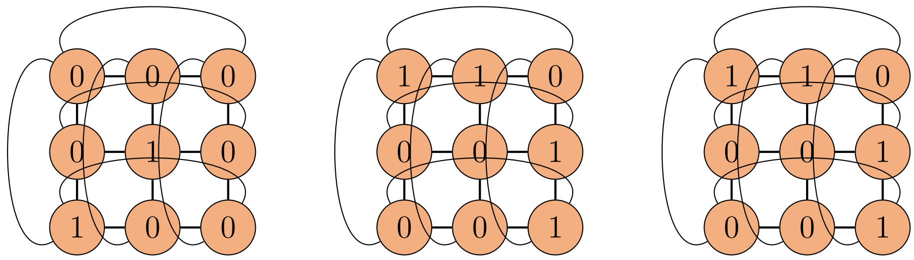

FIGURE 18. Exemple d'évolution du nombre de robots des siècles 0 à 2 dans une galaxie comme dans la question 4b), avec $p = 3$. On constate que, pour cette répartition initiale, il y aura toujours des robots : la galaxie n'est donc pas impropice.

a) On suppose que la galaxie a une planète pour chaque élément de $[\![0, p-1]\!]$, et chaque planète est accessible depuis ses deux voisines : ici, 0 et $p-1$ sont voisines comme sur la figure 17. Pour quels p la galaxie est-elle impropice ?

b) Reprendre la question si la galaxie a une planète pour chaque élément de $[\![0, p-1]\!]^2$, et chaque planète est accessible depuis ses quatre voisines : de même, on considère que les planètes $(0, k)$ et $(p-1, k)$ sont voisines, ainsi que les planètes $(k, 0)$ et $(k, p-1)$, comme illustré sur la figure 18.

c) Reprendre la question pour d'autres galaxies de votre choix.

5. Soit $g \in \mathbb{N}^*$.

a) Proposer des exemples de galaxie impropice. On essaiera de trouver des galaxies ayant un grand nombre de liaisons.

b) Existe-t-il une galaxie telle que, quelle que soit la répartition de départ avec entre 1 et $g-1$ robots par planète, on est assuré qu'une planète contiendra un jour exactement 1 robot ?

c) Reprendre la question b) où l'on veut qu'il y ait une certaine planète qui, pour tout $0 \leq r \leq g-1$, contiendra un jour r robots exactement.

d) Reprendre la question b) où l'on remplace la supposition sur la répartition initiale par le fait qu'au moins une planète contient entre 1 et $g-1$ robots.

6. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.