$\mathbb{TFJM}^2$, session 2020

Problème 2 : départ en vacances

Les exp(airs) taumaths

Avril 2020

Question 1 – Un coffre carré de longueur minimale pour des valises carrées de longueur 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note L_n la longueur minimale en unités arbitraires d'un coffre carré permettant de ranger n valises carrées de longueur 1 unité arbitraire. Ceci définit alors implicitement une suite réelle $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit n un entier naturel non nul.

Examen exhaustif lorsque n est inférieur ou égal à 9 et conjecture

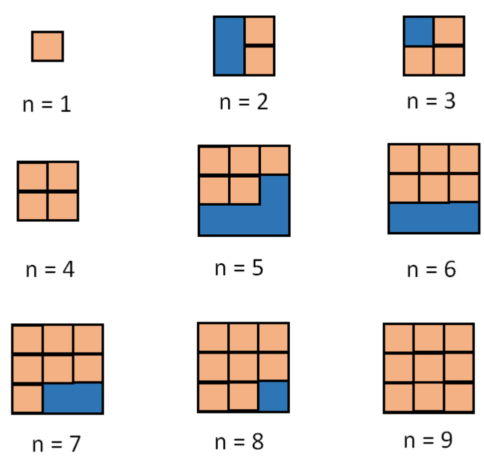

Figure 1: Exemples de remplissage pour les cas où $n < 10$

Que constate-t-on à partir de ces neuf schémas ? À chaque fois que les valises remplissent parfaitement le coffre (cas $n = 1$, $n = 4$ et $n = 9$), c'est-à-dire à chaque fois que n est un carré parfait, alors la longueur minimale du coffre augmente de 1 à l'ajout d'une valise supplémentaire ; autrement dit, on vérifie alors $L_{n+1} = L_n + 1$. En revanche, si le remplissage n'est pas parfait (ce qui survient lorsque n n'est pas un carré parfait), alors la longueur minimale du coffre n'augmente pas à l'ajout d'une valise ; autrement dit, on vérifie alors $L_{n+1} = L_n$.

Pour synthétiser ces deux cas, on conjecture la formule suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad L_n = \left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor + 1 \tag{1}$$

Pour prouver cette conjecture, on distingue deux cas. Ou bien n est un carré parfait, c'est-à-dire qu'on dispose d'un entier naturel non nul p vérifiant $n = p^2$. Ou bien n n'est pas un carré parfait. Alors il existe un unique entier naturel non nul p tel que n appartienne à $]p^2, (p+1)^2[$ (étant donné que la famille $\left([\![p^2, (p+1)^2 - 1]\!]\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$) ; on dispose dès lors d'un unique entier naturel k compris entre 1 et $(p+1)^2 - p^2$ vérifiant $n = p^2 + k$.

Lemme : preuve de la croissance de la suite des longueurs

La croissance (non stricte) de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une intuition structurelle : plus il y a de valises, plus on a besoin de place pour les ranger. Il est possible de s'en convaincre en raisonnant par l'absurde. Montrons que :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^* \quad L_{m+1} \geq L_m \tag{2}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un entier naturel m_0 vérifiant $L_{m_0+1} < L_{m_0}$. Cela signifie qu'il est possible de ranger $m_0 + 1$ valises dans un coffre de longueur L_{m_0} au minimum. Mais alors, si l'on peut ranger $m_0 + 1$ valises dans un tel coffre, il est possible d'en ranger m_0 (il suffit d'en enlever une). Il est donc possible *a fortiori* de ranger m_0 valise dans un coffre de longueur L_{m_0+1}. Or L_{m_0} est par définition la longueur minimale requise pour ranger m_0 valises : l'inégalité $L_{m_0} > L_{m_0+1}$ est donc absurde. Ainsi, la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien croissante.

Cas 1 : résolution du problème lorsque n est un carré parfait

Supposons que n soit un carré parfait. Alors il existe un entier naturel non nul p vérifiant $n = p^2$ (c'est-à-dire $p = \sqrt{n}$). Or, un carré de côté p peut se diviser en p^2 carrés de côté 1. Il est donc possible de ranger parfaitement p^2 valises (c'est-à-dire n valises) dans un coffre carré de longueur p. Comme ce remplissage ne laisse aucun vide, c'est bien le remplissage optimal. On a donc $L_n = \sqrt{n}$. Il suffit donc, pour prouver notre conjecture, de montrer l'égalité suivante :

$$\sqrt{n} = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 1 \tag{3}$$

D'une part, on a $n - 1 = p^2 - 1$. Donc on a $n - 1 < p^2$. D'autre part, on note qu'on a $n - 1 \geq (p-1)^2$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} n - 1 - (p-1)^2 &= n - 1 - p^2 + 2p - 1 && \text{(4a)} \\ &= n - p^2 + 2p - 2 && \text{(4b)} \\ &= 2p - 2 \quad \text{car on a } n = p^2 && \text{(4c)} \end{aligned}$$

Or p est un entier naturel non nul. On a donc $2p \geq 2$, ce qui prouve bien qu'on a $n - 1 \geq (p-1)^2$. On a donc montré la relation $(p-1)^2 \leq n - 1 < p^2$. Par stricte croissance de la fonction racine carrée, il en découle la relation $p - 1 \leq \sqrt{n-1} < p$. Par définition de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}_+$, il vient alors $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor = p - 1$. Conséquemment, on trouve $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 1 = p$, ce qui prouve la relation 3 recherchée.

Cas 2 : résolution du problème lorsque n n'est pas un carré parfait

Supposons maintenant que n ne soit pas un carré. D'après ce que nous avons mentionné au moment de notre conjecture, il existe un unique entier naturel non nul p et un unique entier naturel k compris entre 1 et $(p+1)^2 - p^2$ vérifiant $n = p^2 + k$. Montrons alors par récurrence finie sur k qu'on a $L_{p^2+k} = L_{p^2} + 1$.

- Initialisation. Montrons qu'on a $L_{p^2+1} = L_{p^2} + 1 = p + 1$. D'une part, on a $p^2 \leq p^2 + 1$. D'autre part, on a $p^2 + 1 < (p+1)^2$. En effet, on a :

  $$(p+1)^2 - p^2 - 1 = p^2 + 2p + 1 - p^2 - 1 = 2p \tag{5}$$

  Comme p est strictement positif, on trouve bien $p^2 + 1 < (p+1)^2$ comme attendu. Par suite, comme la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, alors on a $L_{p^2} \leq L_{p^2+1} \leq L_{(p+1)^2}$, c'est-à-dire, en vertu du cas 1, $p \leq L_{p^2+1} \leq p + 1$. Donc L_{p^2+1} est égal à p ou à $p + 1$. Supposons par l'absurde que L_{p^2+1} soit égal à p. Comme le remplissage de p^2 valises dans un coffre carré de côté p était optimal (plus aucune place disponible), il est impossible de trouver un autre agencement qui permette d'inclure une valise supplémentaire sans nécessiter de place supplémentaire : L_{p^2+1} ne peut donc être égal à p. Ainsi, il vient bien $L_{p^2+1} = p + 1$ comme attendu.

- Hérédité. Soit k un entier naturel compris entre 1 et $(p+1)^2 - p^2 - 1$. Supposons qu'on ait $L_{p^2+k} = L_{p^2} + 1$ et montrons qu'on a alors $L_{p^2+k+1} = L_{p^2} + 1 = p+1$. En effet, d'une part, on a $L_{p^2+1} = p+1$ et, d'autre part, on a $L_{(p+1)^2} = p+1$. De plus, on a $p^2 + k + 1 \leq (p+1)^2$; en effet, comme on a $k \leq (p+1)^2 - p^2 - 1$, alors il vient :

$$(p+1)^2 - p^2 - k - 1 \geq (p+1)^2 - p^2 - \big((p+1)^2 - p^2 - 1\big) - 1 \geq 0 \tag{6}$$

  Or la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Donc on a $L_{p^2+1} \leq L_{p^2+k+1} \leq L_{(p+1)^2}$, c'est-à-dire $p+1 \leq L_{p^2+k+1} \leq p+1$. Ainsi, il vient bien l'égalité $L_{p^2+k+1} = p+1$ comme attendu.

- Conclusion. Par principe de récurrence (finie), on a donc prouvé que, pour tout entier naturel k compris entre 1 et $(p+1)^2 - p^2$, on a bien $L_{p^2+k} = L_{p^2} + 1 = p+1$.

Pour prouver notre conjecture, il nous reste donc à montrer que $L_n = L_{p^2+k}$ est bien égal à $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 1$. Comme on a $L_{p^2+k} = p+1$ et $n = p^2+k$, il s'agit donc de démontrer l'égalité $p = \left\lfloor \sqrt{p^2+k-1} \right\rfloor$. On sait qu'on a $0 < k \leq (p+1)^2 - p^2$. Or on a :

$$\begin{aligned}
0 < k \leq (p+1)^2 - p^2 &\iff 1 \leq k \leq (p+1)^2 - p^2 && \text{(7a)}\\
&\iff 0 \leq k-1 < (p+1)^2 - p^2 && \text{(7b)}\\
&\iff p^2 \leq p^2 + k - 1 < (p+1)^2 && \text{(7c)}\\
&\iff p \leq \sqrt{p^2+k-1} < p+1 && \text{(7d)}\\
&\iff p = \left\lfloor \sqrt{p^2+k-1} \right\rfloor && \text{(7e)}
\end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction racine carrée et par définition de la partie entière sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, lorsque n n'est pas un carré parfait, la relation $L_n = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 1$ est bien vérifée.

Conclusion

On a montré que, pour tout entier naturel non nul n, la longueur minimale L_n d'un coffre carré permettant de ranger n valises carrées de côté 1 est égale à :

$$\boxed{L_n = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 1} \tag{8}$$

Question 2 – Un coffre carré de longueur minimale pour des valises rectangulaires de largeur 1 et de longueur h

Pour tout entier naturel n non nul, on note L_n la longueur minimale en unités arbitraires d'un coffre carré permettant de ranger n valises rectangulaires de dimensions 1 unité arbitraire sur h unités arbitraires, h étant un réel strictement positif. On suppose que les valises doivent être rangées toutes à la verticale, ou toutes à l'horizontale. Ceci définit alors implicitement une suite réelle $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Soit n un entier naturel non nul et h un réel strictement positif.

Examen des premiers cas et conjecture lorsque h est entier

Supposons que h soit un entier naturel non nul. On peut alors illustrer les situations et obtenir les remplissages optimaux suivants :

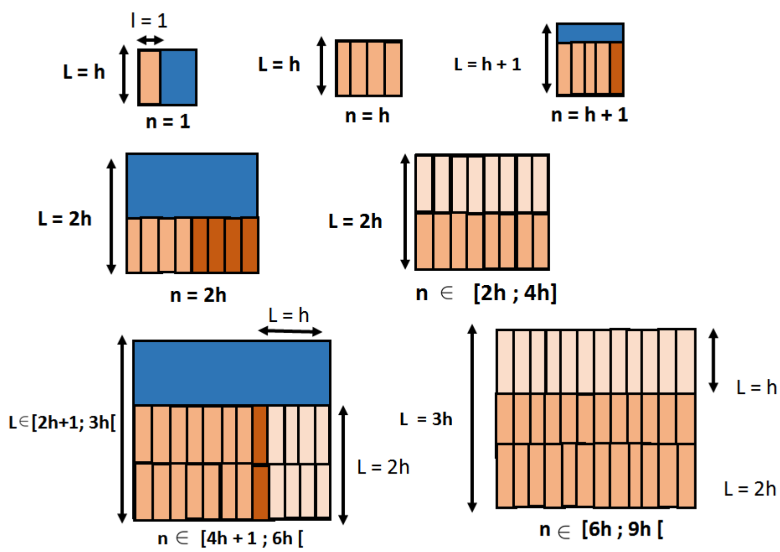

FIGURE 2: Exemples de remplissage de valises de dimension $(1, h)$

Ces cas particuliers nous permettent de formuler les observations suivantes :

- $\forall n \in [\![1, h]\!] \quad L_n = h$
- $\forall n \in [\![h, 2h]\!] \quad L_n = n$
- $\forall n \in [\![2h, 4h]\!] \quad L_n = 2h$
- $\forall n \in [\![4h+1, 6h]\!] \quad L_n = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$
- $\forall n \in [\![6h, 9h]\!] \quad L_n = 3h$

Étant donné que la famille $(\llbracket (p-1)ph, p(p+1)h-1 \rrbracket)_{p\in\mathbb{N}^*}$ forme une partition de $\mathbb{N}$, ces observations nous permettent alors de conjecturer les formules suivantes, pour tout entier naturel non nul p :

(1) Si n est un entier compris entre $(p-1)ph$ et p^2h, c'est-à-dire s'il existe un entier naturel k inférieur ou égal à $p^2h-(p-1)ph = ph$ vérifiant $n = (p-1)ph+k$, alors on a $L_n = ph$.

(2) Si n est compris entre p^2h+1 et $p(p+1)h-1$, c'est-à-dire s'il existe un entier naturel k inférieur ou égal à $p(p+1)h-1-p^2h-1 = ph-2$ vérifiant $n = p^2h+1+k$, alors on a $L_n = ph + \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$.

Lemme d'optimalité

Montrons tout d'abord que, pour tout entier naturel non nul p, on peut ranger parfaitement p^2h valises dans un coffre carré de côté ph. Essayons tout d'abord de nous persuader de ce résultat à l'aide d'un schéma.

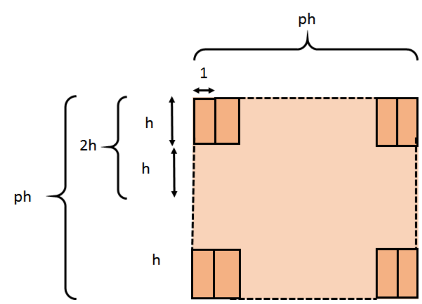

FIGURE 3: Remplissage de p^2h valises de dimension $(1, h$, avec $p \geq 1$ et $h \geq 2$

Soit p un entier naturel non nul. Considérons un coffre carré de côté ph. Alors ce carré peut se découper en p lignes de hauteur h et en ph colonnes de largeur 1. Donc le coffre carré peut se subdiviser en $p \times ph = p^2h$ espaces de dimensions 1 sur h. Ainsi, un coffre carré de telles dimensions peut accueillir, sans laisser d'espace vide, p^2h valises de dimensions 1 sur h rangées dans le même sens.

Résolution du problème dans le premier cas

Soit h un entier naturel non nul. Sans perte de généralité, on peut supposer $h \geq 2$ (sinon on revient dans le cadre d'une valise carrée de longueur 1 étudié à la question 1). Montrons que, pour tout entier naturel non nul p, on a :

$$\forall\, k \in \llbracket 0, ph \rrbracket \quad L_{(p-1)ph+k} = ph \tag{9}$$

- Supposons tout d'abord $p = 1$. Montrons alors que, pour tout entier naturel k au plus égal à h, on a $L_k = h$. Soit k un entier naturel au plus égal à h. Montrons donc qu'on a $L_k = h$. D'une part, comme les valises sont de longueur h, alors on a $L_k \geq h$. Par suite, on rappelle qu'on impose de ranger dans le même sens (horizontalement ou verticalement) k valises de dimensions 1 (largeur) sur h (longueur). Alors, d'autre part, comme k est au plus égal à h, juxtaposer dans le sens de la longueur ces k valises occupe un espace de dimensions h sur k, ce qui peut se ranger dans un coffre carré de côté h : on a donc $L_k \leq h$. Ainsi, on a bien prouvé l'égalité $L_k = h$.

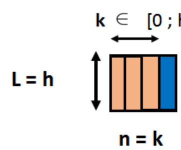

FIGURE 4: Remplissage de k valises de dimensions 1 sur h, avec $k \in [\![0, h]\!]$

- Soit maintenant p un entier naturel au moins égal à 2.
  - ⋆ Alors, en vertu du lemme d'optimalité, on sait que, dans un coffre carré de côté ph, on peut ranger parfaitement p^2h valises. Ainsi, dans ce coffre carré de côté ph, on peut ranger $p^2h - ph$ valises, notamment en libérant la « première ligne » du côté, ainsi que l'indique le deuxième schéma de la figure ci-dessous. On dégage alors un espace libre de dimensions h sur ph. Il est alors clair que, pour tout entier naturel k compris entre 1 et ph, on peut ranger dans cet espace k valises de dimensions 1 sur h dans le même sens que les autres, ainsi que l'indique le troisième schéma de la figure ci-dessous. Ce raisonnement nous montre alors qu'on a $L_{(p-1)ph+k} \leq ph$.

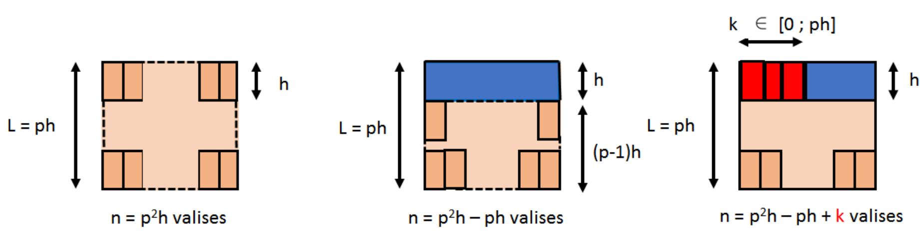

FIGURE 5: Remplissage de $p^2h - ph + k$ valises, avec $k \in [\![0, ph]\!]$

  - ⋆ Par suite, montrons qu'on a $L_{(p-1)ph} \geq ph$. Supposons par l'absurde qu'on ait $L_{(p-1)ph} < ph$, c'est-à-dire $L_{(p-1)ph} \leq ph - 1$. Cela signifie qu'il serait possible de ranger $(p-1)ph$ valises dans un carré de côté $ph-1$ au plus. Or, un carré de telles dimensions peut se diviser en *au plus* $ph-1$ colonnes de largeur 1 et *au plus* en $p-1$ lignes de hauteur h (plus un espace « mort » de hauteur strictement inférieure à h car h est supposé supérieur ou égal à 2 ; en effet, si on pouvait subdiviser notre carré en p lignes de hauteur h ou plus, alors on totaliserait une hauteur de ph au moins, ce qui ne rentre pas dans notre carré de côté $ph-1\dots$). Donc un coffre carré de côté $ph-1$ dispose au plus de $(p-1)(ph-1) = p^2h - p - ph + 1$ espaces de dimensions 1 sur h, donc peut accueillir au maximum $(p-1)ph + (1-p)$ valises carrées de dimensions 1 sur h. Or p est supposé au moins égal à 2. Donc on a $(p-1)ph + (1-p) < (p-1)ph$: la capacité maximale du coffre ne permettra donc pas de ranger $(p-1)ph$ valises. Donc l'inégalité $L_{(p-1)ph} \leq ph-1$ est absurde, montrant alors qu'on a $L_{(p-1)ph} \geq ph$. De façon identique au lemme de la question 1, on prouve que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Donc, pour tout entier naturel k au plus égal à ph, on a $L_{(p-1)ph+k} \geq L_{(p-1)ph}$. Donc on a $L_{(p-1)ph+k} \geq ph$, prouvant alors l'égalité cherchée, à savoir $L_{(p-1)ph+k} = ph$.

- En conclusion, on a prouvé :

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in [\![0, ph]\!] \quad L_{(p-1)ph+k} = ph} \tag{10}$$

Résolution du problème dans le second cas

Soit h un entier naturel non nul. On suppose $h \geq 2$ (sinon on revient dans le cadre d'une valise carrée de longueur 1 étudié à la question 1). Montrons que, pour tout entier naturel non nul p, on a :

$$\forall\, k \in [\![1, ph-1]\!] \quad L_{p^2h+k} = ph + \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil \tag{11}$$

- Supposons tout d'abord $p = 1$. Montrons alors que, pour tout entier naturel k compris entre 1 et $h-1$, on a $L_{h+k} = h+k$. Notons tout d'abord que le remplissage de h valises de dimensions 1 sur h est parfait (voir lemme appliqué au cas $p=1$). Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel k compris entre 1 et $ph-1$, on a $L_{h+k} = h+k$.
  - ⋆ Initialisation. Comme le remplissage de h valises dans un coffre carré de côté h est parfait, alors pour ranger $h+1$ valises, il faut nécessairement de la place supplémentaire. On a donc $L_{h+1} > h$, c'est-à-dire $L_{h+1} \geq h+1$. Or il est justement possible de ranger $h+1$ valises dans un coffre carré de côté

$h+1$ en les rangeant côte à côte, ce qui prouve l'inégalité $L_{h+1} \leq h+1$. Ainsi, on a bien $L_{h+1} = h+1$ comme attendu.

- ⋆ Hérédité. Soit k un entier naturel compris entre 1 et $h-2$. Supposons qu'on ait $L_{h+k} = h+k$ et montrons qu'on a $L_{h+k+1} = h+k+1$. Comme la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, alors on a $L_{h+k+1} \geq L_{h+k}$, c'est-à-dire en vertu de l'hypothèse de récurrence $L_{h+k+1} \geq h+k$. De plus, il est possible de ranger $h+k+1$ valises dans un coffre carré de côté $h+k+1$ en les disposant côte à côte. Ainsi, on a $L_{h+k+1} = h+k$ ou $L_{h+k+1} = h+k+1$. Supposons par l'absurde qu'on ait $L_{h+k+1} = h+k$. Alors les valises ne sont pas rangées côte à côte (sinon on aurait un coffre de longueur $h+k+1$). Donc il y en a nécessairement une qui est au dessus de l'autre, ce qui nécessiterait alors une hauteur totale de $2h > h+k+1$, ce qui est absurde. On a donc bien $L_{h+k+1} = h+k+1$ comme attendu.

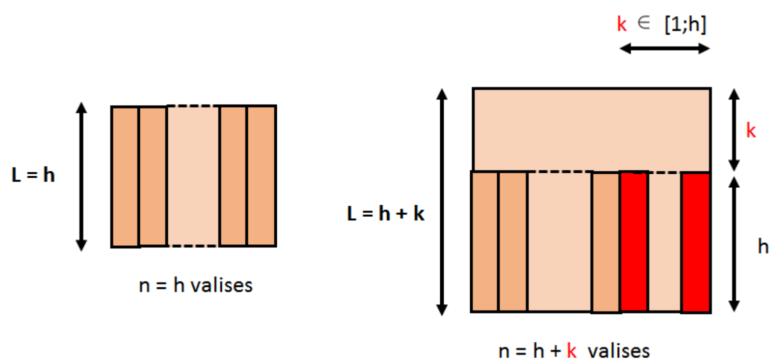

Figure 6: Remplissage de $h+k$ valises avec $k \in [\![1, h-1]\!]$

- ⋆ Conclusion. Par principe de récurrence (finie), on a donc prouvé que, pour tout entier naturel k compris entre 1 et $h-1$, on a bien $L_{h+k} = h+k$.

• Soit maintenant p un entier naturel au moins égal à 2. Soit k un entier naturel compris entre 1 et $ph-1$.

- ⋆ Tout d'abord, on rappelle grâce au lemme précédent que le remplissage de p^2h valises de dimensions 1 sur h est optimal et aboutit à une longueur minimale pour le coffre associé à $L_{p^2h} = ph$. Comment rajouter alors k valises de dimensions 1 sur h ? La famille $([\![pj+1, p(j+1)]\!])_{j\in[\![0,h-1]\!]}$ formant une partition de $[\![1, ph]\!]$, alors il existe un unique entier naturel j au plus égal à $h-1$ tel que k appartienne à $[\![pj+1, p(j+1)]\!]$. Dès lors, on dispose d'un entier naturel ℓ au plus égal à $p(j+1) - pj - 1 = p-1$ vérifiant $k = pj + \ell$.

- Supposons $\ell = 0$. Alors, en reprenant la configuration carrée du rangement de p^2h valises (voir figure 7.1), on juxtapose j colonnes de p valises dans le même sens que les autres p^2h valises : l'espace occupé par ces jp valises ajoutées est alors de dimension $j < h$ sur ph (voir figure 7.2). *In fine*, l'ajout des pj valises peut se faire en ajoutant j colonnes à la configuration initiale de la figure 7.1. On, par définition de la partie entière supérieure, j est précisément égal à $\left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$, ce qui prouve donc l'inégalité $L_{p^2h+k} \leq ph + \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$.
- Supposons maintenant $\ell > 0$. Alors, en reprenant la configuration carrée du rangement de p^2h valises (voir figure 7.1), on juxtapose tout d'abord j colonnes de p valises dans le même sens que les autres p^2h valises : l'espace occupé par ces jp valises ajoutées est alors de dimension $j < h$ sur ph (voir figure 7.2). On peut rajouter $\ell < p$ valises supplémentaires en les juxtaposant dans le même sens dans une nouvelle colonne (voir figure 7.3). Ainsi, l'ajout des $pj + \ell = k$ valises peut se faire en ajoutant $j+1$ colonnes à la configuration initiale de la figure 7.1. On, par définition de la partie entière supérieure, $j + 1$ est précisément égal à $\left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$, ce qui prouve donc l'inégalité $L_{p^2h+k} \leq ph + \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$.

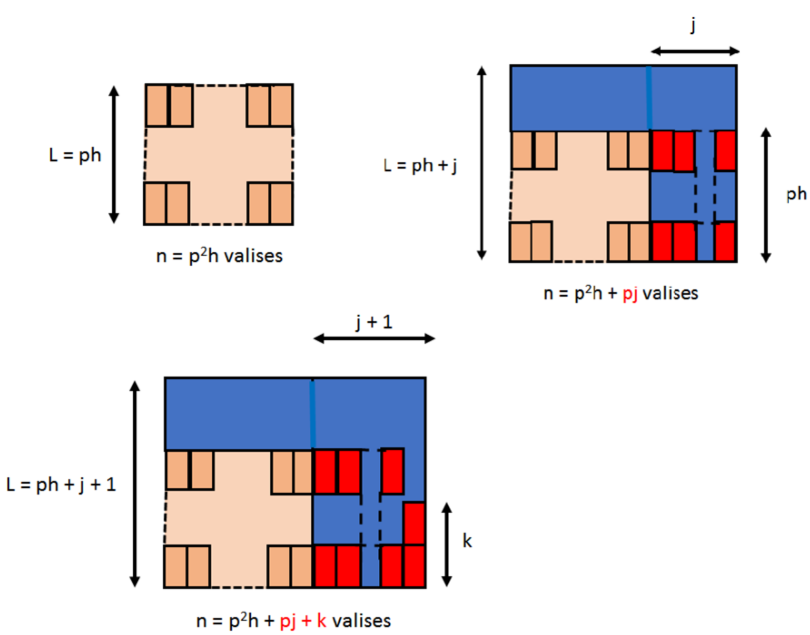

FIGURE 7: Remplissage de $p^2h + (pj + \ell)$ valises, avec $j < h$ et $\ell < p$

- $\star$ Par suite, montrons qu'on a $L_{p^2h+k} \geq ph + \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$. On rappelle qu'il existe un unique entier naturel j au plus égal à $h-1$ tel que k appartienne à $[\![pj+1, p(j+1)]\!]$, et qu'alors on dispose d'un entier naturel ℓ au plus égal à $p(j+1) - pj - 1 = p-1$ vérifiant $k = pj + \ell$. Supposons par l'absurde qu'on ait $L_{p^2h+k} < ph + \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$.

  - ▶ Supposons $\ell = 0$. Alors on $\left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil = j$. Donc notre hypothèse se reformule $L_{p^2h+k} < ph + j$, c'est-à-dire $L_{p^2h+k} \leq ph + j - 1$. Cela signifie qu'il serait possible de ranger $p^2h + k$ valises dans un carré de côté $ph + j - 1$ au plus, avec $j < h$. Or, un carré de telles dimensions peut se diviser en *au plus* $ph+j-1$ colonnes de largeur 1 et *au plus* en p lignes de hauteur h (et même seulement $p-1$ lignes de hauteur h lorsque j est nul). Donc un coffre carré de côté $ph + j - 1$ dispose au plus de $p(ph + j - 1) = p^2h + pj - p$ espaces de dimensions 1 sur h, donc peut accueillir au maximum $p^2h + pj - p$ valises carrées de dimensions 1 sur h. Or p est supposé au moins égal à 2. Donc on a $p^2h+pj-p < p^2h+pj$, c'est-à-dire $p^2h + pj - p < p^2h + k$: la capacité maximale du coffre ne permettra donc pas de ranger $p^2h + k$ valises. Donc l'inégalité $L_{p^2h+k} \leq ph + j - 1$ est absurde, montrant alors qu'on a $L_{p^2h+k} \geq ph + j$.
  - ▶ Supposons $\ell > 0$. Alors on $\left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil = j + 1$. Donc notre hypothèse se reformule $L_{p^2h+k} < ph + j + 1$, c'est-à-dire $L_{p^2h+k} \leq ph + j$. Cela signifie qu'il serait possible de ranger $p^2h + k$ valises dans un carré de côté $ph + j$ au plus, avec $j < h$. Or, un carré de telles dimensions peut se diviser en *au plus* $ph + j$ colonnes de largeur 1 et *au plus* en p lignes de hauteur h (plus éventuellement, lorsque j est non nul, un espace « mort » de hauteur $j < h$). Donc un coffre carré de côté $ph + j$ dispose au plus de $p(ph + j) = p^2h + pj$ espaces de dimensions 1 sur h, donc peut accueillir au maximum $p^2h + pj$ valises carrées de dimensions 1 sur h. Or on a $p^2h + pj < p^2h + pj + \ell$: la capacité maximale du coffre ne permettra donc pas de ranger $p^2 + pj + \ell$ valises. Donc l'inégalité $L_{p^2h+ph} \leq ph + j$ est absurde, montrant alors qu'on a $L_{p^2+ph} \geq ph + j + 1$.

  Dans les deux cas, on a bien montré l'inégalité $L_{p^2+ph} \geq ph + \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$, prouvant alors ultimement l'égalité $L_{p^2+ph} = ph + \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$.

- En conclusion, on a prouvé :

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in [\![0, ph]\!] \quad L_{p^2h+k} = ph + \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil} \tag{12}$$

Question 3 – Avec possibilité de rotations de valises rectangulaires de largeur 1 et de longueur 2

Pour tout entier naturel n non nul, on note L_n la longueur minimale en unités arbitraires d'un coffre carré permettant de ranger n valises rectangulaires de dimensions 1 unité arbitraire sur 2 unités arbitraires. On suppose que les valises peuvent être rangées chacune à l'horizontale ou à la verticale. Ceci définit alors implicitement une suite réelle $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit n un entier naturel non nul.

Examen des premiers cas et conjecture

Ces éléments nous permettent de conjecturer que, pour tout entier naturel n non nul et tout entier naturel j non nul, on a $L_n = j+1$ si, et seulement si, n est compris entre $\dfrac{(j-1)j}{2} + \left\lceil \dfrac{j-1}{2} \right\rceil + 1$ et $\dfrac{j(j+1)}{2} + \left\lceil \dfrac{j}{2} \right\rceil$.

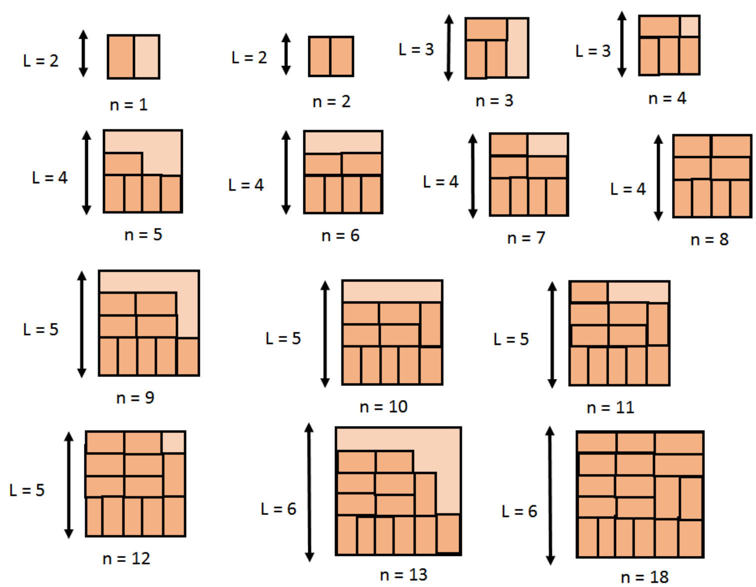

FIGURE 8: Exemples de remplissage de valises de dimension $(1,2)$

La famille $\left(\left[\!\left[\dfrac{(j-1)j}{2} + \left\lceil \dfrac{j-1}{2} \right\rceil + 1, \dfrac{j(j+1)}{2} + \left\lceil \dfrac{j}{2} \right\rceil \right]\!\right]\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel j non nul, on pose alors A_j l'ensemble défini par $A_j := \left[\!\left[\dfrac{(j-1)j}{2} + \left\lceil \dfrac{j-1}{2} \right\rceil + 1, \dfrac{j(j+1)}{2} + \left\lceil \dfrac{j}{2} \right\rceil \right]\!\right]$. Dès lors, notre conjecture se reformule comme suit : pour tout entier naturel non nul n, L_n est égal à $j+1$, où j est l'unique entier naturel non nul tel que n appartienne à A_j.

Lemmes d'optimalité

- D'une part, on rappelle d'après le lemme d'optimalité de la question 2 que, pour tout entier naturel non nul p, on peut ranger parfaitement $2p^2$ valises dans un coffre carré de côté $2p$. En effet, si on peut ranger parfaitement les valises sans les tourner, ainsi on peut également les ranger parfaitement lorsqu'on autorise de surcroît les rotations (il suffit de ne pas en faire...).
- D'autre part, montrons que, pour tout entier naturel non nul p, on peut ranger de façon optimale (en laissant un espace vide carré de côté 1) $2p^2 + 2p$ valises dans un coffre carré de côté $2p + 1$. Soit p un entier naturel non nul.
  - ⋆ Considérons un coffre carré de côté $2p + 1$. Alors on peut le diviser en p lignes de hauteur 2 (plus un espace « mort » de hauteur 1) et en $2p + 1$ colonnes de largeur 1. Donc un coffre carré de côté $2p+1$ contient d'ors et déjà $p(2p + 1)$ espaces rectangulaires de dimensions 1 par 2 pouvant donc accueillir $p(2p+1)$ valises rectangulaires de dimensions 1 sur 2 rangées dans le même sens. Considérons maintenant l'espace mort de dimension 1 par $2p+1$. On peut alors subdiviser cet espace mort en p espaces rectangulaires de dimension 1 par 2 pouvant donc accueillir dans le sens contraire (en admettant que l'horizontal soit le contraire du vertical et vice versa...) p autres valises rectangulaires de dimensions 1 par 2. Ainsi, un coffre carré de côté $2p + 1$ permet d'accueillir au moins $p(2p + 1) + p$, c'est-à-dire $2p^2 + 2p$ valises rectangulaires, $p(2p+1)$ étant rangées à la verticale, les p autres étant rangées à l'horizontale (par exemple). Ceci prouve donc qu'on a $L_{2p^2+2p} \leq 2p + 1$.
  - ⋆ Montrons dès lors qu'on a $L_{2p^2+2p} \geq 2p+1$. Supposons par l'absurde qu'on ait $L_{2p^2+2p} < 2p + 1$. Cette supposition signifie en particulier qu'il soit possible de ranger $2p^2 + 2p$ dans un coffre carré de côté $2p$ au plus. Or un coffre carré de côté $2p$ UA (unités arbitraires) est d'aire $4p^2$ UA^2. Or $2p^2+2p$ valises rectangulaires de dimensions 1 sur 2 non superposées occupent une aire $2 \times (2p^2 + 2p)$ UA^2, c'est-à-dire une aire de $4p^2 + 4p$. Comme p est non nul, cette aire est strictement supérieure à $4p^2$, soit la capacité maximale d'un coffre de côté $2p$. L'hypothèse $L_{2p^2+2p} < 2p + 1$ est donc absurde, ce qui prouve l'inégalité $L_{2p^2+2p} \geq 2p + 1$, et donc l'égalité $L_{2p^2+2p} = 2p + 1$.

Résolution du problème

Soit n un entier naturel non nul. Alors il existe un unique entier naturel j non nul tel que n appartienne à $A_j = \left[\!\left[\frac{(j-1)j}{2} + \left\lceil \frac{j-1}{2} \right\rceil + 1, \frac{j(j+1)}{2} + \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil \right]\!\right]$.

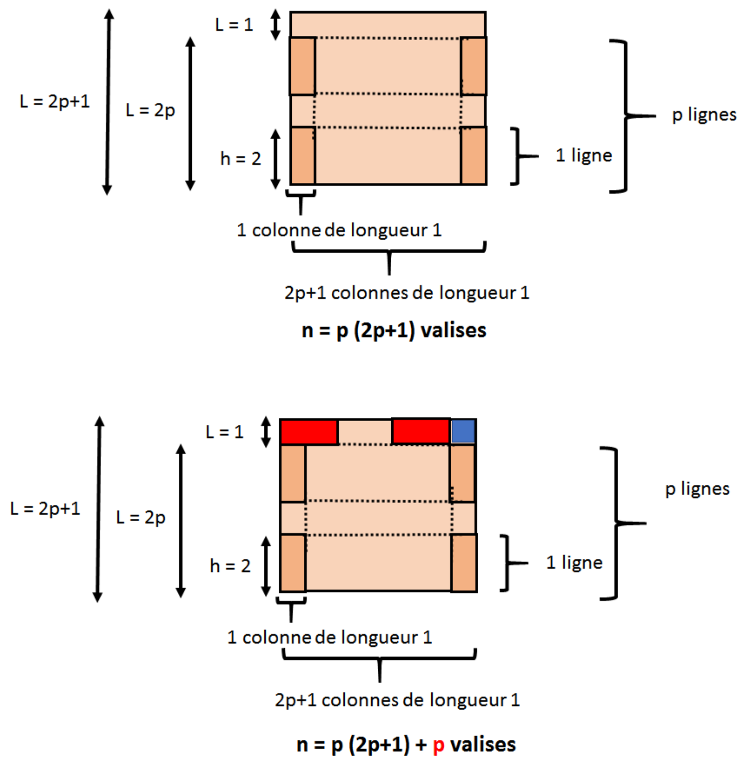

FIGURE 9: Remplissage de $p(2p+1)+p$ valises

- Supposons que j soit pair. Alors il existe un entier naturel non nul p vérifiant $j = 2p$. On rappelle que l'entier naturel n appartient à A_j. Or on a :

$$n \in A_j \iff \frac{(j-1)j}{2} + \left\lceil \frac{j-1}{2} \right\rceil + 1 \leq n \leq \frac{j(j+1)}{2} + \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil \tag{13a}$$

$$\iff \frac{(2p-1)\times 2p}{2} + \left\lceil \frac{2p-1}{2} \right\rceil + 1 \leq n \leq \frac{2p(2p+1)}{2} + \left\lceil \frac{2p}{2} \right\rceil \tag{13b}$$

$$\iff p(2p-1) + p + 1 \leq n \leq p(2p+1) + p \tag{13c}$$

$$\iff 2p^2 + 1 \leq n \leq 2p^2 + 2p \tag{13d}$$

En particulier, on a $n > 2p^2$ et $n \leq 2p^2 + 2p$. Par croissance de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, propriété déjà démontrée auparavant, on a donc $L_n \geq L_{2p^2}$ et $L_n \leq L_{2p^2+2p}$. Grâce au lemme d'optimalité, on a donc $L_n \geq 2p$ et $L_n \leq 2p+1$. Donc L_n est ou bien égal à $2p$, ou bien à $2p+1$. Supposons par l'absurde qu'on ait $L_n = 2p$. On rappelle que le remplissage de $2p^2$ valises est optimal dans un coffre carré de côté $2p$ et ne laisse donc aucun espace vide. Pour ranger une valise supplémentaire, il faut donc un coffre strictement plus grand. Donc l'hypothèse $L_n = 2p$ est absurde, prouvant alors qu'on a $L_n = 2p + 1$, c'est-à-dire $L_n = j + 1$ comme annoncé.

- Supposons que j soit impair. Alors il existe un entier naturel p vérifiant $j = 2p + 1$. On rappelle que l'entier naturel n appartient à A_j. Or on a :

$$n \in A_j \iff \frac{(j-1)j}{2} + \left\lceil \frac{j-1}{2} \right\rceil + 1 \leq n \leq \frac{j(j+1)}{2} + \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil \tag{14a}$$

$$\iff p(2p+1) + p + 1 \leq n \leq (p+1)(2p+1) + (p+1) \tag{14b}$$

$$\iff 2p^2 + 2p + 1 \leq n \leq 2(p+1)^2 \tag{14c}$$

En particulier, on a $n > 2p^2 + 2p$ et $n \leq 2(p+1)^2$. Par croissance de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a donc $L_n \geq L_{2p^2+2p}$ et $L_n \leq L_{2(p+1)^2}$. Grâce au lemme d'optimalité, on a donc $L_n \geq 2p+1$ et $L_n \leq 2p+2$. Donc L_n est ou bien égal à $2p + 1$, ou bien à $2p + 2$. Supposons par l'absurde qu'on ait $L_n = 2p + 1$. On rappelle que le remplissage de $2p^2 + 2p$ valises est optimal dans un coffre carré de côté $2p + 1$ dans la mesure où il ne laisse qu'un espace vide carré de côté. Pour ranger une valise supplémentaire, il faut donc un coffre strictement plus grand. Donc l'hypothèse $L_n = 2p + 1$ est absurde, prouvant alors qu'on a $L_n = 2p + 2$, c'est-à-dire $L_n = j + 1$ comme annoncé.

- En conclusion, on aa montré que, pour tout entier naturel non nul n, L_n est égal à $j+1$, où j est l'unique entier naturel non nul tel que n appartienne à A_j, où A_j est défini par l'ensemble $\left[\!\left[\frac{(j-1)j}{2} + \left\lceil \frac{j-1}{2} \right\rceil + 1, \frac{j(j+1)}{2} + \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil \right]\!\right]$.