TFJM

Les Exp(airs) taumaths

April 2020

1 Problème 6 : Ils nous espionnent

Avant de commencer à répondre aux questions, nous allons introduire une notion et quelques notations qui concernent les variables et paramètres du problème. Dans toute la suite nous allons noter :
— N le nombre de quartiers.
— d le nombre de drones.
— n le nombre d'agents.
— p le nombre de quartiers ou le voleur peut possiblement être.

Notion : La partie entière supérieure ou en excès d'un nombre réel x qu'on va noter $Esup$ tout le long du problème est l'unique entier relatif n tels que :

$$n - 1 < x \leq n$$

C'est donc le plus petit nombre entier n supérieur ou égal au nombre réel x en question.

1.1 Questions 1 et 2

La procédure opératoire de Winston et ses contraintes liées à ses ressources nous permettent d'identifier 3 cas possibles de répartition des drones dans les quartiers :

1. **Premier cas :**

Jours	Matin	Après-Midi	Nuit
1^{er}	Winston envoie $d < \frac{N}{2}$ drones	montre sonne : n doit être égal à d, alors $n < \frac{N}{2}$ montre ne sonne pas : n doit être égal à $N - d$, alors $n > \frac{N}{2}$	voleur ne change pas de place
2^{me}	Winston envoie $d < \frac{N}{4}$ drones	montre sonne : n doit être égal à d, alors $n < \frac{N}{4}$ montre ne sonne pas : n doit être égal à $N - d$, alors $n > \frac{N}{4}$	voleur peut changer de de places

Exemple :
Voici une schéma qui décrit un exemple de ville circulaire avec 6 quartiers pour laquelle Winston utilise seulement 2 drones.

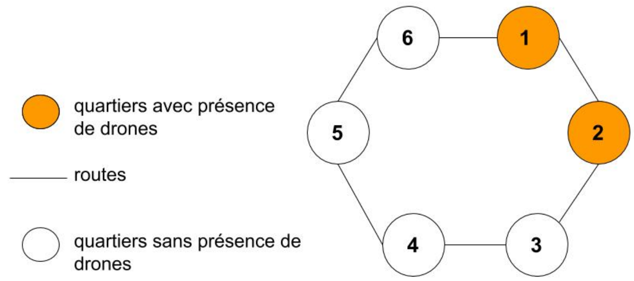


Figure 1 : Cas avec $N = 6$ et $d = 2$

2. **Deuxième cas :**

Jours	Matin	Après midi	Nuit
1^{er}	Winston envoie $d > \frac{N}{2}$ drones	montre sonne : n doit être égal à d alors $n > \frac{N}{2}$ montre ne sonne pas : n doit être égal à $N - d$, alors $n < \frac{N}{2}$	voleur ne change pas de places
2^{me}	Winston envoie $d > \frac{N}{4}$ drones	montre sonne : n doit être égal à d, alors $n > \frac{N}{4}$ montre ne sonne pas : n doit être égal à $N - d$, alors $n < \frac{N}{4}$	voleur peut changer de places

Exemple :
Voici une schéma qui décrit un exemple de ville circulaire avec 6 quartiers pour laquelle Winston utilise seulement 4 drones.

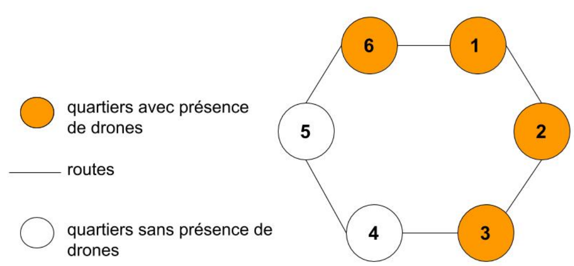


Figure 2 : Cas avec $N = 6$ et $d = 4$

3. **Troisième cas :**

Jours	Matin	Après Midi	Nuit
1^{er}	Winston envoie $d = \frac{N}{2}$ drones	montre sonne : n doit être égal à d alors $n = \frac{N}{2}$ montre ne sonne pas : n doit etre égal à $N - d$, alors $n = \frac{N}{2}$	voleur ne change pas de places
2^{me}	Winston envoie $d = \frac{N}{4} drones$	montre sonne : n doit être égal à d, alors $n = \frac{N}{4}$ montre ne sonne pas : n doit être égal à $N - d$, alors $n = \frac{N}{4}$	voleur peut changer de places

Exemple :
Voici une schéma qui décrit un exemple de ville circulaire avec 6 quartiers pour laquelle Winston utilise seulement 3 drones.

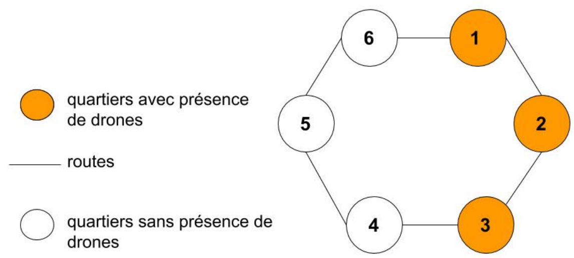


Figure 3 : Cas avec $N = 6$ et $d = 3$

En comparant les 3 cas ci-dessus, on en déduis que si Winston veut arrêter le voleur avec certitude après un certain nombre de jours, il est obligé d'envoyer un nombre de drones égal à la moitié du nombre de quartiers. En effet, cela lui permet d'être certain de connaître le nombre d'agents qu'il doit envoyer avant que sa montre sonne ou pas. Ainsi il peut être certain de l'attraper ou pas.

En 1 seul jour :
Si la montre sonne, $n = \frac{N}{2}$
Si la montre ne sonne pas, $n = \frac{N}{2}$
En 2 jours :
Si la montre sonne, $n = \frac{N}{4}$
Si la montre ne sonne pas, $n = \frac{N}{4}$
Que cela soit après 1 ou 2 jours de recherche, la sonnerie de la montre n'a aucune influence sur le nombre d'agents n envoyés par Winston.
Dans le cas où le nombre de quartiers N est impair, alors n n'est pas un entier relatif, ce qui est absurde. On utilise alors la partie entière supérieure $Esup$ et non la partie entière E car on étudie le pire cas pour connaître le nombre d'agents n suffisant pour être certain de l'attraper.
On obtient donc la relation :
- pour 1 jour :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}; \forall N \in \mathbb{N}; \quad n = Esup(\frac{N}{2})}$$

- pour 2 jours :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}; \forall N \in \mathbb{N}; \quad n = Esup(\frac{N}{4})}$$

4. **Après 2 jours :**

Attention : Hypothèse que tous les quartiers sont reliés entre eux par des routes à double sens.

Après 2 jours, la logique de diviser par 2 le nombre de quartiers de la ville N afin de trouver le nombre d'agents n nécessaire pour attraper le voleur n'est plus respectée. En, effet le voleur a la possibilité de se déplacer d'un quartier à un autre pendant la nuit à partir de la 2ème nuit.
Afin que Winston envoie le minimum d'agents n pour l'attraper après le 2ème jour, en plus d'envoyer ses drones dans la moitié des quartiers p, il doit les positionner tous du même coté.

Par exemple :

pour $N = 6$

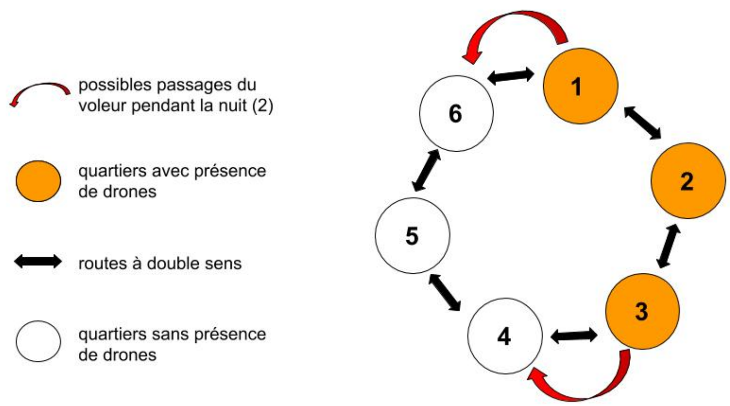


Figure 4 : Exemple d'évolution des p quartiers durant la nuit pour une ville avec $N = 6$ quartiers

Comme on peut le voir sur le schéma, cette technique permet de limiter les possibles passages du voleur entre un quartier où Winston est sur de son absence et un quartier où le voleur peut probablement être.
Avec cette technique, le nombre de quartiers p au matin avant que Winston envoie ses drones, a augmenté seulement de 2.

On introduit la suite (Uj) qui donne p en fonction de j, le nombre de jours. On a donc : $\boxed{U(j) = p}$
Soit le terme initial $U(0)$ de la suite correspondant au 2ème jour (fin de journée) de recherche de Winston.
On a donc : $U(j) = Esup(\frac{N}{4})$ avec $N > 4$ car sinon Winston aurait déjà trouvé le voleur lors du 1^{er} jour.
Le domaine de définition de p_0 est donc : $p_0 \geq 2$

5. **Détermination de la récurrence de la suite :**

Au jour suivant $j + 1$, p augmente de 2 puis est divisé par 2 lorsque Winston envoie ses drones dans la moitié des p quartiers.
On a donc :
$U(j+1) = Esup(\frac{U(j)+2}{2})$
$U(j+1) = Esup(\frac{U(j)}{2}) + 1$
$U(j+1) = Esup(\frac{p}{2}) + 1$

Si (Uj) est croissante ou constante, le nombre p de quartiers augmente ou stagne au cours des jours. C'est à dire que Winston ne pourra jamais être certain de l'attraper car il n'a pas réussi à l'attraper auparavant (les 2 premiers jours).

Si (Uj) croissante :
$\forall p_0 \geq 2$, on a donc :
$\Rightarrow U_1 > U_0$
$\Rightarrow Esup(\frac{p_0}{2}) + 1 > p_0$
$\Rightarrow Esup(\frac{p_0}{2}) > p_0 - 1$
$\Rightarrow p_0 < 2$
or $p_0 \geq 2$, donc (Uj) ne peut pas être croissant.

Si (Uj) constante :
$\forall p_0 \geq 2$, on a donc :
$U_1 = U_2$
$\Rightarrow Esup(\frac{p_0}{2}) + 1 = p_0$
$\Rightarrow Esup(\frac{p_0}{2}) = p_0 - 1$
$\Rightarrow p_0 = 2$ ou $p_0 = 3$
$\Rightarrow U(0) = 2$ ou $U(0) = 3$
$\Rightarrow Esup(\frac{N}{4}) = 2$ ou $Esup(\frac{N}{4}) = 3$
$\Rightarrow N \in [5; 12]$ avec $N \in N$

Conclusion : Si $n < Esup(\frac{N}{4})$ (après 2 jours de recherche) et que la ville compte N quartiers tels que $N \in [5; 12]$, Winston ne pourra jamais être certain de pouvoir attraper le voleur.

Si (Uj) décroissante, Winston a ainsi la possibilité d'arrêter le voleur avec certitude après plus de 2 jours :
Si (Uj) est décroissante :
$\forall p_0 \geq 2$, on a donc :
$U_1 < U_0$
$\Rightarrow Esup(\frac{p_0}{2}) + 1 < p_0$
$\Rightarrow Esup(\frac{p_0}{2}) < p_0 - 1$
$\Rightarrow p_0 > 2$

6. **Raisonnement par l'absurde :**

si $p = 3$
$\Rightarrow Esup(\frac{3}{2}) + 1 < 3$
$\Rightarrow 2 + 1 < 3$
$\Rightarrow 3 < 3 \Rightarrow ABSURDE$
On en conclut que :
$Esup(\frac{p_0}{2}) + 1 < p_0$
$\Rightarrow p_0 > 3$
$\Rightarrow U(0) > 3$
$\Rightarrow Esup(\frac{N}{4}) > 3$
$\Rightarrow N > 12$

C'est à dire que dans le cas où la ville possède plus de 12 quartiers reliés entre eux, la suite (Uj) est décroissante, et ainsi Winston a la possibilité d'être certain de retrouver le voleur.
Or, lorsque $p = 3$, la suite (Uj) est constante :
On en déduit que :
$\forall N > 12 ; \lim_{j \to \infty} U(j) = 3$

Conclusion : Si Winston veut être certain d'attraper le voleur après le 2ème jour, il faut que :

$$\boxed{3 \leq n < Esup(\frac{N}{4})}$$

Remarque : Le nombre de jours suffisant à Winston pour attraper le voleur correspond à $j + 2$ avec j tels que $U(j) = 3$ car $U(0)$ correspond au 2ème jour.

1.2 Question 3 : Ville qui n'a pas de boucles

D'après l'énoncé, une ville qui n'a pas de boucles signifie que cette ville compte $N = 2$ ou $N = 1$ quartiers. De plus, dans le cas où la ville compte 2 quartiers, ils ne doivent pas être reliés par une route.
Afin d'être certain de pouvoir attraper le voleur en 1 jour en utilisant le minimum d'agents n possibles, il faut que :
$n = Esup(\frac{N}{2})$, d'après la question 1)

1er cas de villes n'ayant pas de boucles :
$n = Esup(\frac{1}{2}) = 1$

2ème cas de villes n'ayant pas de boucles :
$n = Esup(\frac{2}{2}) = 1$

Conclusion : Afin de pouvoir attraper le voleur dans n'importe quelle ville qui n'a pas de boucles, il suffit à Winston d'avoir 1 seul agent avec lui.

1.3 Question 4 :

Afin de répondre à la question, nous allons procéder à une disjonction de cas pour les 3 premiers jours de recherche :
Soit N, le côté d'une grille carré (représentant une ville)
Soit N^2, le nombre de quartier d'une ville
Attention : dans cette question le nombre de quartiers d'une ville où le voleur peut possiblement être est P et non p comme dans les questions précédentes !

-N est pair :

1) N n'est pas un multiple de 4 :

Afin que Winston soit certain de pouvoir attraper le voleur, il envoie ses drones dans la moitié des P quartiers.
Voici une illustration de l'évolution des P quartiers dans ce cas : Soit $N = 6$ car 6 est un nombre pair, mais pas un multiple de 4 :

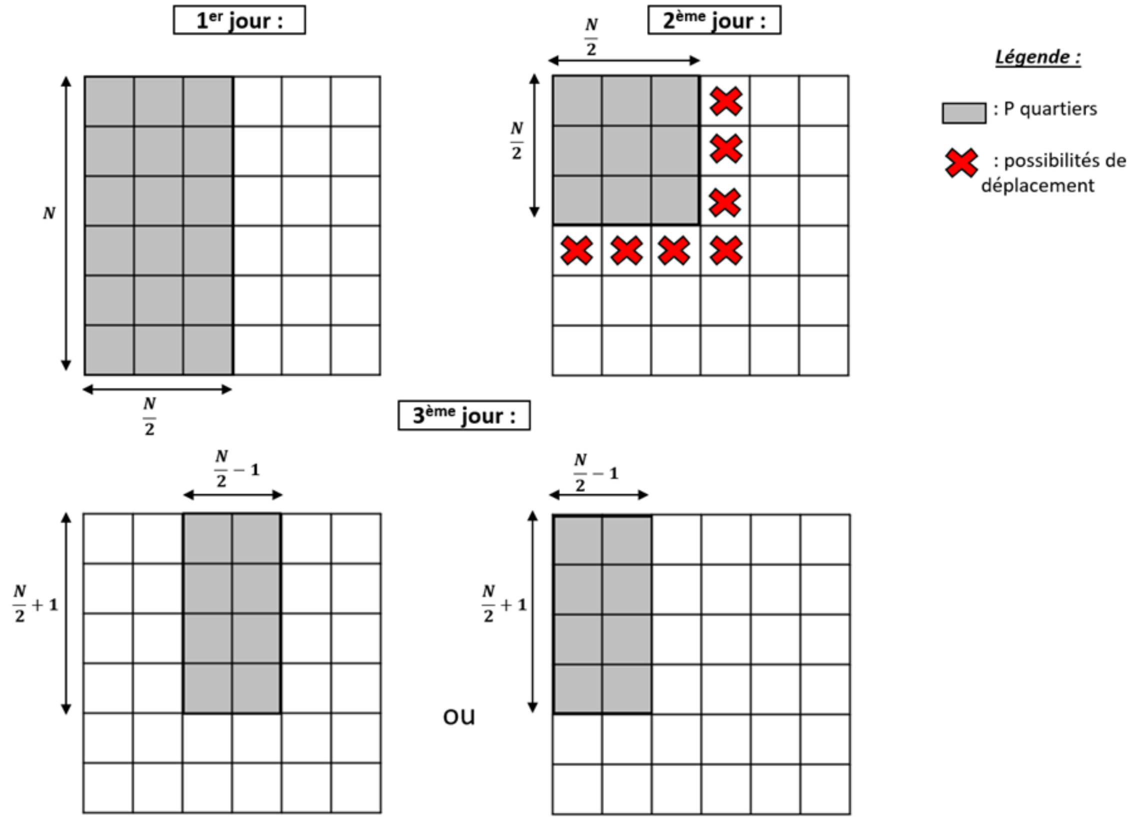


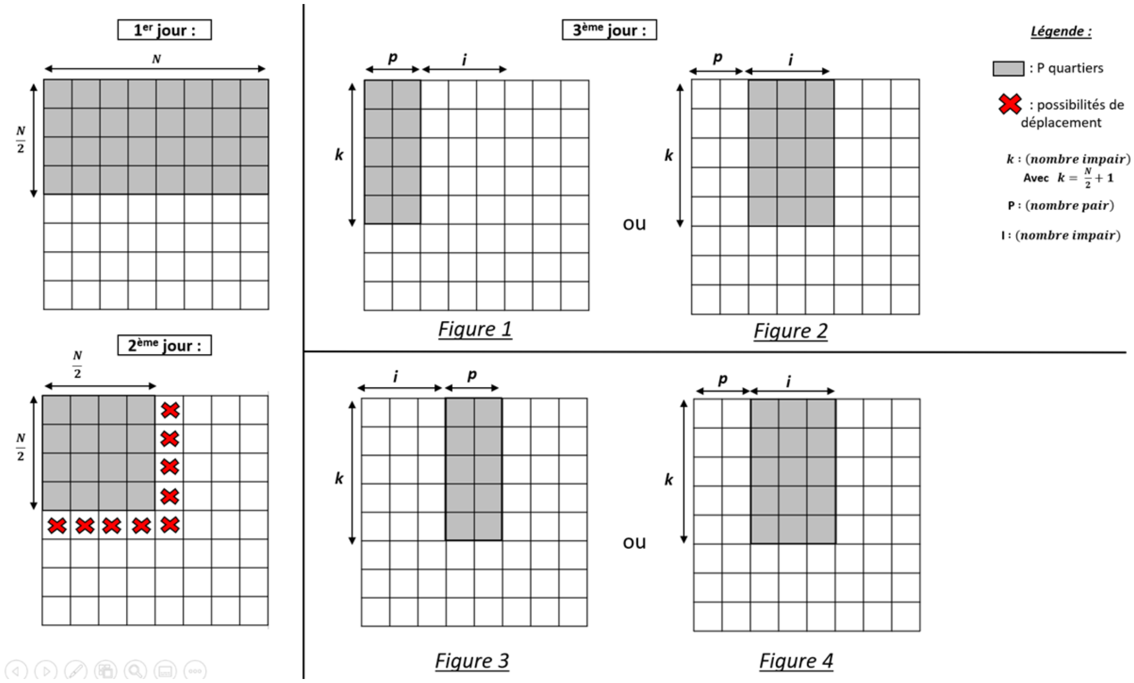
Figure 1 *Figure 2*

On en déduit que :
Si N est pair et n'est pas un multiple de 4 :
alors,
Si Winston l'attrape :
En 1 jour, $n \geq N \times \frac{N}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{N^2}{2}$
En 2 jour, $n \geq \frac{N}{2} \times \frac{N}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{N^2}{4}$

Il y a 2 possibilités pour le 3ème jour :
Soit le voleur est situé dans les quartiers du rectangle ayant deux côtés comme extrémités (Figure 2), soit il est situé dans ceux du rectangle ayant qu'un seul côté comme extrémité. Or, nous devons toujours étudier le pire cas possible, afin de connaître le nombre d'agents n qui lui suffit pour être sur de l'attraper. Le pire cas est celui de la Figure 1 car il peut se déplacer dans beaucoup plus de quartiers le jours suivant.
Ainsi, d'après la figure 2,
Si Winston l'attrape :
En 3 jours, $n \geq (\frac{N}{2}+1)(\frac{N}{2}-1) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{N^2}{4} - 1$
Remarque : au 3ème jour, P diminue encore.

2) N est un multiple de 4 :

Afin que Winston soit certain de pouvoir attraper le voleur, il envoie ses drones dans la moitié des P quartiers.
Voici une illustration de l'évolution des P quartiers dans ce cas : Soit $N = 8$ car 8 est un nombre pair, et c'est un multiple de 4 :



Donc, si N est pair et que c'est un multiple de 4 :
alors,
En 1 jour, $n \geq N \times \frac{N}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{N^2}{2}$
En 2 jour, $n \geq \frac{N}{2} \times \frac{N}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{N^2}{4}$

A partir du 3ème jour, le groupe de P quartiers de côté k est impair.
On utilise donc pas la technique d'envoyer un nombre de drones tels que $d = E(\frac{P}{2})$ car les P quartiers ne seraient pas regroupés sous forme de rectangle, cela deviendrait trop compliqué à étudier par la suite.

Soit k, un nombre impair positif.
alors, $\exists t \in \mathbb{N}$, tel que $k = 2t + 1$
k peut alors se décomposer sous la forme $k = t + t + 1$
On en déduit donc que chaque nombre impair peut être décomposé en somme de 2 nombres consécutifs.
Nous pouvons donc réecrire k sous la forme :

$$k = i + p \text{ avec } \begin{cases} i = p + 1 \ ou \ p = i + 1 \\ i : nombre \ impair \ positif \\ p : nombre \ pair \ positif \end{cases}$$

La technique est donc d'envoyer les drones afin que les rectangles (où Winston peut possiblement être) aient un nombre de quartiers P le plus proche possible.
Ainsi, il va y avoir un rectangle avec ik quartiers et un autre avec pk quartiers.

Donc,
Pour la Figure 1 : $P = ik$
Pour la Figure 2 : $P = pk$
et,
Pour la Figure 3 : $P = pk$
Pour la Figure 4 : $P = ik$

Ainsi, sans cet exemple où $i = p + 1$, il y a deux options possibles :
- Soit on obtient la Figure 1 ou 2
- Soit on obtient la Figure 3 ou 4

Cependant, Nous nous devons de toujours conserver le pire des cas possibles
- Le pire cas entre la Figure 1 et 2 est la Figure 2 (car plus de possibilités de déplacement).

- Le pire cas entre la Figure 3 et 4 est la Figure 3.

En effet, la Figure 3 n'a que son côté de longueur p qui est à l'extrémité de la Ville.
Donc, au jour suivant :
$P = pk + 2k + p + 2$

La Figure 4 a 2 de ses côtés (un de longueur k et un de longueur p) qui sont à l'extrémité de la ville.
Donc, au jour suivant :
$P = ik + i + k + 1$
$P = pk + k + p + k + 2$ ‘ $\quad$ $car\ i = p + 1$
$P = pk + 2k + p + 2$

Ainsi, on remarque que le nombre de P quartiers sera le même au jour suivant pour le cas de ces deux Figures (Figures 3 et 4). Néanmoins, il va continuer d'augmenter de manière plus importante dans la Figure 3 car le voleur a plus de possibilités de déplacement.
C'est donc pour cela que la cas de la Figure 3 est pire que celui de la Figure 4.

Ainsi il y a deux options, la première où le pire cas est celui de la Figure 2 et la deuxième où le pire cas est celui de la Figure 3. C'est Winston qui décide la stratégie qu'il adopte et donc le choix qu'il fait entre ces deux options (entre Figure 3 et Figure 2). Logiquement, il va choisir la meilleure option pour attraper le voleur. Or le cas de la Figure 3 est moins pire que celui de la Figure 2 : il semble que la Figure 3 a un nombre de P quartiers inférieur à celui de la figure du deuxième jour.

Explications :

D'après le figure 3,
En 3 jours :
$n \geq p \times (\frac{N}{2} + 1)$
Or, en 2 jours, $n \geq \frac{N^2}{4}$

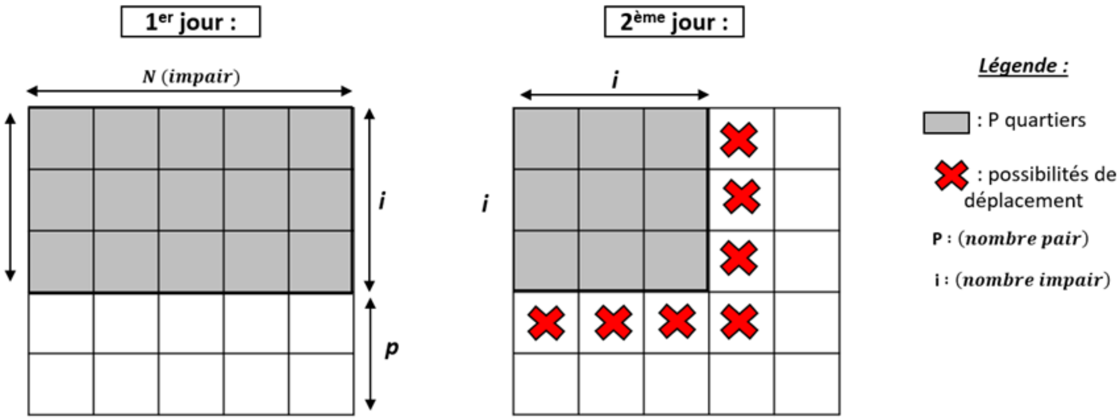
Déterminons si le nombre d'agents n suffisant pour être certain d'attraper le voleur diminue entre le 2ème jour et le 3ème jour :

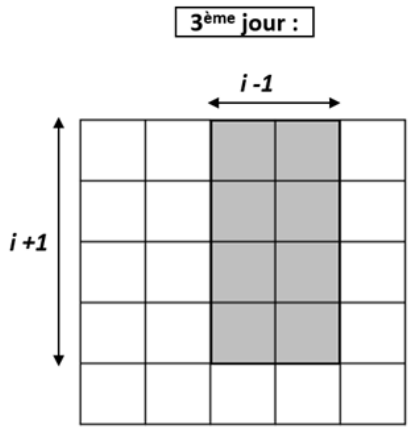
$\frac{N^2}{4} - p \times (\frac{N}{2} + 1)$
$= \frac{N}{2} \times \frac{N}{2} - p \times (\frac{N}{2} + 1)$
$= (p + i - 1)^2 - p \times (i + p)$ car $\frac{N}{2} + 1 = k = p + i$
$= p^2 + i^2 + 2pi - 2p - 2i + 1 - p \times (i + p)$
$= (p + i)^2 - 2 \times (p + i) + 1 - p \times (i + p)$
$= (p + i) \times ((p + i) - 2 - p) + 1$
$= (p + i) \times (i - 2) + 1$
Si $i \geq 3$,
alors, $(p + i) \times (i - 2) + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{N^2}{4} - p \times (\frac{N}{2} + 1) > 0 \Leftrightarrow \frac{N^2}{4} > p \times (\frac{N}{2} + 1)$
On en déduit que si $i \geq 3$, alors le nombre suffisant d'agents n pour être sûr d'attraper le voleur diminue entre le 2ème et le 3ème jour.

-N est impair :

1) $N = i + p$ avec $i = p + 1$:

Afin que Winston soit certain de pouvoir attraper le voleur, comme le nombre de quartiers N^2 est impair, il envoie les drones de manière à former des rectangles (où Winston peut possiblement être) ayant un nombre de quartiers P le plus proche possible. A partir du 3ème jour, c'est la même méthode que lorsque N est pair et n'est pas un multiple de 4 pour déterminer le rectangle regroupant les P quartiers que l'on doit étudier.
Voici donc une illustration de l'évolution des P quartiers dans ce cas où $N = i + p$ et $i = p + 1$:



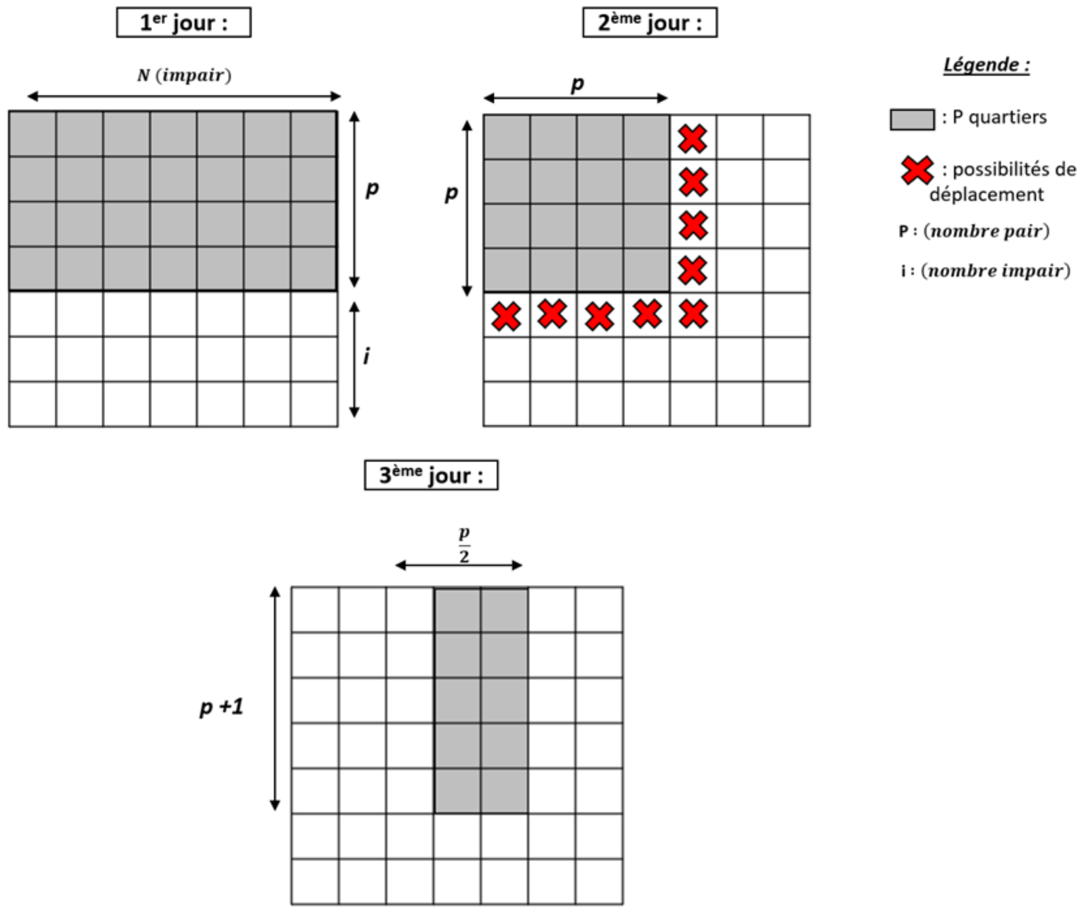


Donc :
Si N impair avec $N = i + p$ et $i = p + 1$, alors :
Winston attrape le voleur :

En 1 jour, si $n \geq iN$
En 2 jours, si $n \geq i^2$
En 3 jours, si $n \geq (i+1)(i-1) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq i^2 - 1$
remarque : $i^2 - 1 < i^2$

2) $N = i + p$ avec $p = i + 1$:

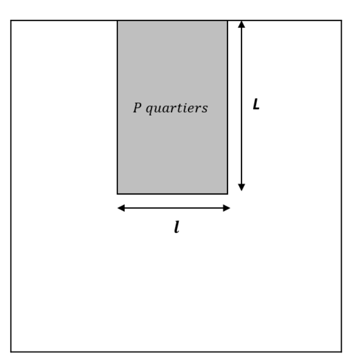
Afin que Winston soit certain de pouvoir attraper le voleur, comme le nombre de quartiers N^2 est impair, il envoie les drones de manière à former des rectangles (où Winston peut possiblement être) ayant un nombre de quartiers P le plus proche possible. A partir du 3ème jour, c'est la même méthode que lorsque N est pair et est un multiple de 4 pour déterminer le rectangle regroupant les P quartiers que l'on doit étudier. Voici donc une illustration de l'évolution des P quartiers dans ce cas où $N = i + p$ et $p = i + 1$:



Donc :
Si N impair avec $N = i + p$ et $p = i + 1$, alors :
Winston attrape le voleur :

En 1 jour, si $n \geq pN$
En 2 jours, si $n \geq p^2$
En 3 jours, si $n \geq \frac{p}{2} \times (p+1)$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{p^2}{2} + \frac{p}{2}$
$\Leftrightarrow n \geq p \times (\frac{p}{2} + \frac{1}{2})$
remarque : $p \times (\frac{p}{2} + \frac{1}{2}) \ < p^2 \quad car \ \ \frac{p}{2} + \frac{1}{2} < p$

Donc, quelque soit N, au troisième jour, le rectangle qui regroupe les P quartiers (où Winston peut possiblement être) est à la même place :



Le rectangle regroupant les P quartiers n'a qu'un seul (un côté l) qui est à l'extrémité de la ville.
On peut donc généraliser l'étude des P quartiers après 3 jours

Soit (U_j), la suite qui donne le nombre de P quartiers en fonction du nombre de jour avec U_0 qui représente le troisième jour.
D'après le schéma :

$U_j = l \times L$
$U_{j+1} = l \times L + l + 2 + 2L$

Étude de la variation de cette suite :

$U_{j+1} - U_j = l \times L - l \times L + l + 2 + 2L$
Donc, $U_{j+1} - U_j = l + 2 + 2L$
or, $l > 0$ et $L > 0$
Donc, $U_{j+1} - U_j > 0$ Ainsi,

$$U_{j+1} > U_j$$

On en déduit donc que la suite (U_j) est croissante sur $\mathbb{N}$.

Conclusion :

Nous avons donc montré que le nombre d'agents nécessaire pour être certain d'attraper le voleur au troisième jour était inférieur au nombre d'agents nécessaire pour l'attraper au deuxième jour.
De plus, nous avons aussi démontré que la suite (U_j) est croissante et donc qu'a partir du troisième jour, le nombre de P quartiers ne fait qu'augmenter.
Nous pouvons donc affirmer que dans le cas des grilles carrés, c'est lors du troisième jour que le nombre d'agents nécessaire pour l'attraper avec certitude est le plus petit.
Donc, pour répondre à la question du sujet, il nous suffit de reprendre pour chaque cas la valeur minimum de n au troisième jour :

N est pair et ce n'est pas un multiple de 4 :
Nombre d'agent minimum nécessaire :

$$\boxed{n_{min} = \frac{N^2}{4} - 1}$$

N est pair et c'est un multiple de 4 :
Nombre d'agent minimum nécessaire :

$$\boxed{n_{min} = p \times (\frac{N}{2} + 1)}$$

N est impair et $N = i + p$ avec $i = p + 1$:
Nombre d'agent minimum nécessaire :

$$\boxed{n_{min} = i^2 - 1}$$

N est impair et $N = i + p$ avec $p = i + 1$:
Nombre d'agent minimum nécessaire :

$$\boxed{n_{min} = p \times (\frac{p}{2} + \frac{1}{2})}$$

1.4 Question 5 : une ville où il est impossible d'attraper le voleur avec n agents

Pour répondre à cette question, il faut que nous trouvions une ville dans laquelle Winston ne pourra jamais être certain de pouvoir attraper le voleur avec n agents.

Essayons d'abord de trouver une ville circulaire dans laquelle il ne peut pas l'attraper avec n agents au cours des 2 premiers jours (c'est à dire avant que le voleur puisse se déplacer) :
Or nous avons montré précédemment que si Winston voulait être certain d'attraper le voleur dans un ville circulaire au cours des 2 premiers jours il fallait que son nombre d'agents n vérifie la condition : $n \geq Esup(\frac{N}{4})$.
Nous cherchons ici à trouver N en fonction de n tel que l'inégalité suivante soit vraie :

$n < Esup(\frac{N}{4})$
$\Leftrightarrow n < n+1$ car $Esup(\frac{N}{4} \in \mathbb{N})$
$\Leftrightarrow n < Esup(n + \frac{1}{4})$
$\Leftrightarrow n < Esup(\frac{4n+1}{4})$
Donc par identification :
$N = 4n + 1$ Donc si Winston se trouve dans une ville de $4n + 1$ quartiers et qu'il dispose de N agents, il ne pourra jamais être sur de l'arrêter avant qu'il puisse se déplacer.

1.5 Question 6 : Nombre de drones d limité

1.5.1 Question 1/2 :

Comme déjà énoncé dans l'exercice 1, si Winston veut être certain d'arrêter le voleur après un certain nombre de jours, il doit envoyer un nombre de drones égal à la moitié du nombre de p quartiers.
Afin de l'attraper :
En 1 jour, $d \geq E(\frac{N}{2})$ car $d \in \mathbb{N}$
En 2 jours, $d \geq E(\frac{N}{4})$ car $d \in \mathbb{N}$
Après 2 jours, $d \geq E(\frac{p}{2})$ car $p \in \mathbb{N}$

1.5.2 Question 3 :

Dans le cas d'une ville qui n'a pas de boucles, le nombre de quartiers N est égal à 1 ou 2.
Avec la même technique pour être certain de l'attraper, on a donc :
En 1 jour, $d \geq E(\frac{N}{2})$

Si $N = 1$,	Si $N = 2$,
$d \geq E(\frac{1}{2})$	$d \geq E(\frac{2}{2})$
$\Leftrightarrow d \geq 0$	$\Leftrightarrow d \geq 1$

1.5.3 Question 4 :

Attention : dans cette question le nombre de quartiers d'une ville où le voleur peut possiblement être est P et non p comme dans les questions précédentes !

Si le nombre de quartiers N^2 est pair et n'est pas un multiple de 4. Alors, pour d'être certain d'attraper le voleur, il doit envoyer un nombre de drones égal à la moitié du nombre de P quartiers. Afin de l'attraper :
En 1 jour, $d \geq \frac{N^2}{2}$
En 2 jours, $d \geq \frac{N^2}{4}$
En 3 jours, $d \geq i^2 - 1$
Après 3 jours, $d \geq \frac{P}{2}$
Si le nombre de quartiers N^2 est impair avec $N = i + p$ et $i = p + 1$. Alors, pour d'être certain d'attraper le voleur, il doit envoyer un nombre de drones de manière à former des rectangles (où Winston peut possiblement être) ayant un nombre de quartiers P le plus proche possible. Afin de l'attraper :
En 1 jour, $d \geq iN$
En 2 jours, $d \geq i^2$
En 3 jours, $d \geq i^2 - 1$
Après 3 jours, $d \geq \frac{P}{2}$
Si le nombre de quartiers N^2 est pair et est un multiple de 4. Alors, pour d'être certain d'attraper le voleur, il doit envoyer un nombre de drones égal à la moitié du nombre de P quartiers. Afin de l'attraper :
En 1 jour, $d \geq \frac{N^2}{2}$
En 2 jours, $d \geq \frac{N^2}{4}$

En 3 jours, $d \geq p \times (\frac{N}{2} + 1)$
Après 3 jours, $d \geq \frac{P}{2}$
Si le nombre de quartiers N^2 est impair avec $N = i + p$ et $p = i + 1$. Alors, pour d'être certain d'attraper le voleur, il doit envoyer un nombre de drones de manière à former des rectangles (où Winston peut possiblement être) ayant un nombre de quartiers P le plus proche possible. Afin de l'attraper :
En 1 jour, $d \geq pN$
En 2 jours, $d \geq p^2$
En 3 jours, $d \geq \frac{p}{2} \times (p + 1)$
Après 3 jours, $d \geq \frac{P}{2}$

1.5.4 Question 5 :

Si Winston veut toujours avoir une possibilité d'attraper le voleur quelque soit la ville avec un nombre n d'agents fixé :
Alors, le nombre de drones mise à sa disposition doit valoir au minimum :
$d = 1$

Dans le cas où il est impossible de capturer le voleur, il faut que :
Le nombre de drones soit nul, soit $d = 0$
Sauf si Winston est obligé d'utiliser tous ses drones :

Soit (dn) la suite qui donne le nombre maximum de drones que Winston doit envoyer en fonction des n agents qui ne lui permet pas de pouvoir capturer le voleur.
On remarque que :

Il est impossible de capturer le voleur lorsque :
- $n = 1; \forall p > 3, \quad d_1 = p - 2$
- $n = 2; \forall p > 5, \quad d_2 = p - 3$
- $n = 3; \forall p > 7, \quad d_3 = p - 4$
- $n = 4; \forall p > 9, \quad d_4 = p - 5$
- $n = 5; \forall p > 11, \quad d_5 = p - 6$

On en déduit que : $d_{n+1} = d_n - 1$ avec $d_n > n$
Montrons par récurrence P(n) ; $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = p - (n + 1)$
Initialisation : pour $n = 1$
$d_1 = p - 2$
$d_1 = p - (1 + 1) = p - 2$
$\Rightarrow$ P(1) est vrai

Hérédité :
Supposons que $P(n)$ est vrai pour quelconque n fixé dans $\mathbb{N}^*$ et montrons que $P(n + 1)$ est vrai : $d_{n+1} = p - (n + 2)$

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n - 1 \\ &= p - (n + 1) - 1 \\ &= p - (n + 2) \end{aligned}$$

$P(n + 1)$ est donc vrai.
On a donc montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = p - (n + 1)$

Conclusion : Si Winston doit impérativement envoyer tous ses drones, il est impossible pour lui d'attraper le voleur quelque soit la ville si son nombre de drones vaut :

$$\boxed{n < d \leq p - (n + 1)}$$

1.6 Question 7 : Proposer et étudier d'autres pistes de recherche

Durant tout le long de l'exercice, on a considéré que toutes les routes reliant les quartiers étaient à double sens.

Nouvelle hypothèse : Toutes les routes sont à sens unique et dans le même sens.
On cherche à déterminer si Winston a la possibilité d'être certain de trouver le voleur après tant de jours j. Afin d'être certain, Winston doit appliquer la même technique, c'est à dire envoyer ses drones dans la moitié des quartiers N de la ville. Afin d'utiliser le moins de drones possibles, il doit les positionner tous du même coté. Les deux premiers jours de recherche ne sont pas impactés par cette condition de routes à sens unique car le voleur ne peut pas se déplacer lors de la première nuit.

Après deux jours :

Lorsque toutes les routes sont à sens uniques, le voleur ne peut se déplacer que dans 1 seul sens. Ainsi, on remarque qu'au jour suivant $j+1$, le nombre de p quartiers reste le même. En effet, le groupe de p quartiers se déplace entièrement d'un quartier dans le sens des routes.

Exemple :
Voici une schéma qui décrit un exemple de ville circulaire avec 8 quartiers après 2 jours de recherche. Attention ce schéma néglige l'utilisation des drones !
Au 2^{me} jour (après-midi) :
$p = Esup(\frac{8}{4})$
$\Rightarrow p = 2$

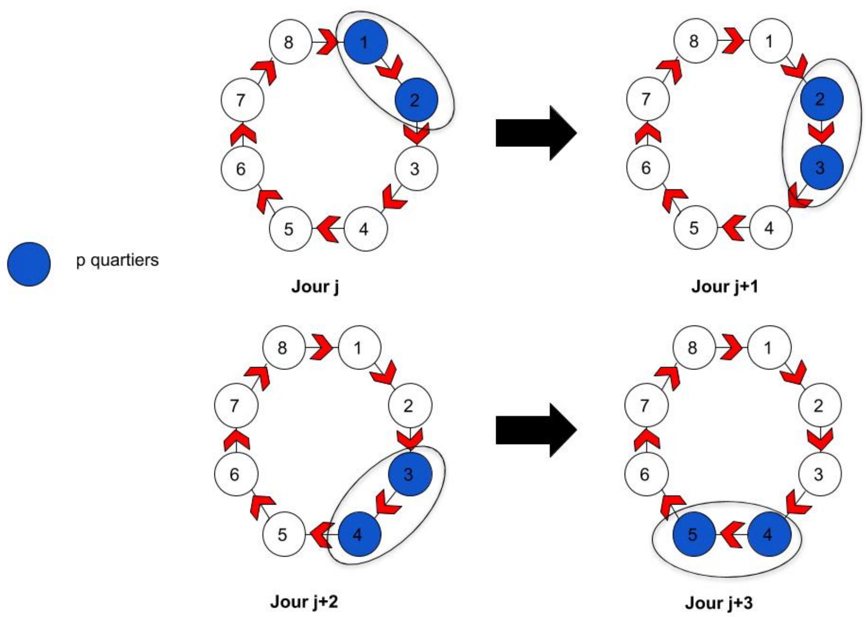


Figure 5 : Cas avec $N = 8$ et $p = 2$

Ainsi cette situation revient au même que lorsque le voleur ne peut pas se déplacer la nuit. On peut donc appliquer la même logique qu'aux 2 premiers jours.

1. **Détermination de l'expression de la suite $U(j)$:** Soit la suite $U(j)$ qui donne le donne le nombre d'agents suffisant pour attraper le voleur en fonction du nombre de jours j de recherche. Le premier terme $U(0)$ correspond au matin du 1^{er} jour.
   Récurrence de la suite :
   Winston envoie la moitié de ses drones dans la moitié des p quartiers. Chaque jour, le nombre d'agents n suffisant est donc divisé par 2.
   Donc,
   $$\forall j \in \mathbb{N};\ U(j+1) = \frac{U(j)}{2} \quad avec \quad U(0) = N$$

(Uj) est donc une suite géométrique.
(Uj) s'écrit donc sous la forme :
$U(j) = q^j \times U(0)$
$U(j) = (\frac{1}{2})^j \times N$
$U(j) = \frac{1}{2^j} \times N$
$U(j) = \frac{N}{2^j}$
Or, $\forall j \in \mathbb{N};\ U(j) \in \mathbb{N}$
Donc,

$$\boxed{U(j) = Esup(\frac{N}{2^j})}$$

Remarque :
D'après la suite $U(j) = Esup(\frac{N}{2^j})$ Si Winston veut faire diminuer le nombre de jours qu'il lui faut pour attraper le voleur, il doit alors multiplier par 2 son nombre d'agents. En effet, à chaque fois qu'il va multiplier par 2 son nombre d'agents n, il gagnera 1 jour.

2. **Limite de la suite :**

   Soit la suite $U(t) = \frac{N}{2^t}$
   Soit $N \in \mathbb{N}$;
   $\lim_{t\to\infty} \frac{N}{2^t} = 0$
   Ainsi la suite $U(t)$ tend vers 0 mais ne l'atteint jamais.
   Donc :

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} Esup(\frac{N}{2^t}) = 1}$$

3. **Conclusion :**
   Winston peut arrêter le voleur avec certitude pour n'importe quelle ville N ayant des routes à sens unique dans le même sens. Plus la ville N est grande, plus Winston mettra du temps à attraper le voleur.
   On peut donc chercher à déterminer le nombre de jours qu'il lui faut pour attraper le voleur en fonction de la taille de la ville N si Winston compte le minimum d'agents, soit $n = 1$.
4. **Nombre de jours maximum pour attraper le voleur en fonction du nombre de quartiers N :**

   Imaginons que Winston ne connaît pas au préalable le nombre d'agents n qu'on lui donne pour sa mission. Alors, le nombre de jours maximum qu'il peut envisager pour réussir son opération est dans le cas où il n'a qu'un seul agent à sa disposition. On va donc considérer qu'il ne dispose que d'un seul agent.
   Soit (Uj) la suite qui donne le nombre d'agents n en fonction du nombre de jours : $U(j) = Esup(\frac{N}{2^j})$

   Calcul du nombre de jours maximum pour l'attraper en fonction du nombre de quartiers N :

   $\forall j \in \mathbb{N}; Esup(\frac{N}{2^j}) = 1$
   $\Rightarrow 2^j \geq N$
   $\Rightarrow \ln(2^j) \geq \ln(N)$ car (ln) est croissante sur $[0;\infty[$
   $\Rightarrow j\ln(2) \geq \ln(N)$
   $\Rightarrow j \geq \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$ car $\ln(2) \geq 0$
   $\Rightarrow j = Esup(\frac{\ln(N)}{\ln(2)})$

5. **Conclusion :**
   Ainsi, le jour maximum qu'il peut envisager en fonction du nombre de quartiers N est :

$$\boxed{j = Esup(\frac{\ln(N)}{\ln(2)})}$$