TFJM

Les Exp(airs) taumaths

Problème 7 : De Joyeux Bûcherons

1 Question 1

Appelons P_1, la propriété énonçant que le tronc fin de longueur L est ouvert.
Soit p_i, la position initial du segment avant déplacement et p_f, deux positions quelconque dans le plan.
Montrons qu'il est toujours possible de déplacer un tronc de p_i à p_f.

1.1 Montrons qu'un tronc ne peut jamais être bloqué

Nous allons assimiler le bosquet à un plan qu'on munit d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ afin de repérer les arbres. Ces derniers sont représentés par des points à deux coordonnées réelles et les troncs sont représentés par des segments du plan.
Prenons un cas extrême, mais avant
On considère les notations suivantes :

- $A(x';y_1)$ et $B(x';y_2)$ deux arbres ponctuels appartenant au bosquet.
- $\mathcal{T}$ le tronc fin de longueur L qui a pour extrémités A et B (d'après P_1).
- C et D, deux arbres ponctuels de part et d'autre du tronc fin, respectivement de coordonnées réelles $C(x;y)$ et $D(x+h;y)$ avec : $\lim\limits_{h\to 0} x+h = x$.

On précisera que $x \leq x' \leq x+h$

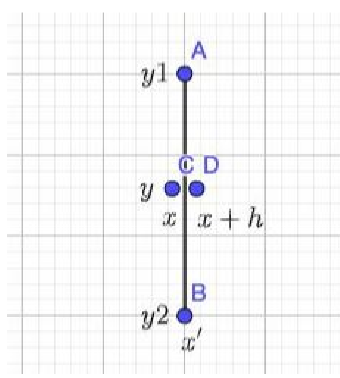

Figure 1: Modélisation de la situation initiale avec un tronc $\mathcal{T}$ positionné à p_i

Première étape :

- Si on translate le segment $[AB]$ vers D, on obtient alors le segment $[A'B']$ ayant pour coordonnées réelles $A'(x+h-\alpha;y_1)$ et $B'(x+h-\alpha;y_2)$ avec : $0 \leq \alpha \leq h$
- On précisera que que les points A' et B' ne représentent pas des arbres ponctuels mais seulement les extrémités de $\mathcal{T}$
- Ainsi, on a l'inégalité suivante : $x \leq x' \leq x+h-\alpha \leq x+h$

Deuxième étape :
1.Premier cas :

- On translate de nouveau le segment $[A'B']$ verticalement pour pouvoir ensuite l'amener à la position finale p_f souhaitée.

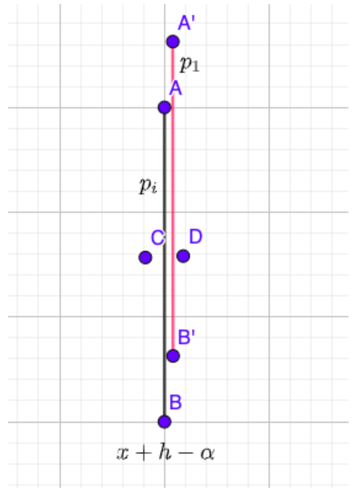

Figure 2: Modélisation d'une translation verticale de $[A'B']$ de p_i à p_1

2. Deuxième cas :

- On translate de nouveau le segment $[A'B']$ vers le point D, on obtient alors $[A''B'']$ ayant pour coordonnées réelles $A''(x+h-\beta; y_1)$ et $B''(x+h-\beta; y_2)$ avec : $0 \leq \beta \leq \alpha \leq h$
- Ainsi, on a $x \leq x' \leq x+h-\alpha \leq x+h-\beta \leq x+h$

Remarque : On peut répéter ce raisonnement n fois pour tout n entier naturel pour arrivée à p_f
Conclusion : Un tronc ne peut jamais être bloqué totalement.

1.2 Montrons qu'il est toujours possible de déplacer ce tronc fin $\mathcal{T}$

On sait que :

- Le bosquet est constitué d'un nombre fini d'arbres ;
- Comme montré précédemment, un tronc ne peut jamais être bloqué

Cela signifie qu'il existe toujours un moyen de faire sortir le tronc fin $\mathcal{T}$ du bosquet ;
Une fois hors du bosquet, il n'y a plus d'obstacle et on peut donc mettre facilement le tronc fin $\mathcal{T}$ dans la position voulu pour atteindre p_f

Remarque : Entre p_i et p_f, il existe p_n, avec n un entier naturel, représentant l'ensemble des positions intermédiaires par lesquelles va passer $\mathcal{T}$ pour atteindre p_f

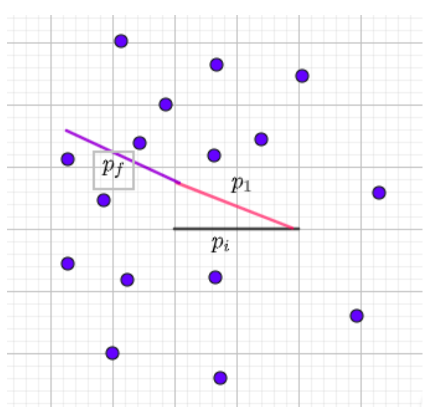

Figure 3: Exemple de situation pour passer de p_i à p_f sans sortir du bosquet

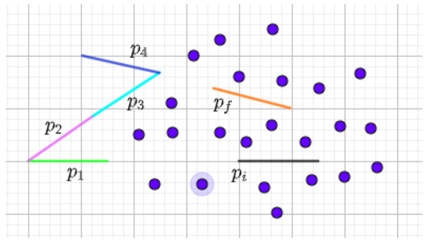

Figure 4: Exemple de situation pour passer de p_i à p_f en sortant du bosquet

Conclusion : Il est toujours possible pour les bûcherons de déplacer $\mathcal{T}$.

1.3 Comment est-ce possible de toujours déplacer $\mathcal{T}$ d'une position à l'autre ?

Grâce à :

- une ou plusieurs rotation **et/ou** une ou plusieurs translations
- De plus, on peut toujours déplacer ce tronc de p_i à p_f grâce aux positions intermédiaires p_n ; n un entier naturel

2 Question 2

2.1 Propriété

- Soit un disque $\mathcal{D}$ de centre O et de rayon r ;
- Soit Ω un point quelconque appartenant à $\mathcal{D}$;
- Appliquer à $\mathcal{D}$ une rotation de centre Ω et d'angle θ revient à effectuer une translation de $\mathcal{D}$

2.2 Démonstration

Données :

- $\mathcal{P}$ le plan cartésien (Euclidien)
- $R_{\Omega;\theta}$:$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ rotation du centre Ω d'angle θ
- $\mathcal{T}_{\overrightarrow{\mathrm{u}}}$:$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ translation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{u}}$
- $\mathcal{D}_{(\theta;}$r)={M$\in \mathcal{P}/OM \leq r$}
- $\mathcal{D}'_{(\theta';}$r')= {M$\in \mathcal{P}/O'M \leq r'$}=$R_{(\Omega;\theta)}$ ($\mathcal{D}_{(\theta;}$r)
- $\mathcal{D}''_{(\theta'';}$r")={M$\in \mathcal{P}/O''M \leq r''$}= $\mathcal{T}_{\overrightarrow{\mathrm{u}}}$ ($\mathcal{D}_{(\theta;}$r)

Objectif :

On cherche à montrer que si $\Omega \in \mathcal{D}_{(\theta;}$r) alors $\exists \overrightarrow{\mathrm{u}}$ un vecteur tel que :

$$\mathcal{D}'_{(\theta';}\mathrm{r'})=\mathcal{D}''_{(\theta'';}\mathrm{r''})$$
$$\iff R_{(\Omega;\theta)}\ (\mathcal{D}_{(\theta;}\mathrm{r})=\mathcal{T}_{\overrightarrow{\mathrm{u}}}\ (\mathcal{D}_{(\theta;}\mathrm{r}))$$

Prenons $A\in\mathcal{P}$

2.2.1 Montrons que $A \in R_\theta(\mathcal{D}) \Longrightarrow \exists \overrightarrow{\mathbf{u}} / A \in \mathcal{T}_{\overrightarrow{\mathbf{u}}}(D)$

Appliquer $R_{(\Omega;\theta)}$ à A un point appartenant à $\mathcal{D}$
On nomme A' l'image de A par $R_{(\Omega;\theta)}$
On applique cette rotation $R_{(\Omega;\theta)}$ à l'ensemble des points appartenant à $\mathcal{D}$
On obtient ainsi $\mathcal{D}'_{(\theta';\mathrm{r'})}$

Appliquer maintenant la translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{\mathrm{u}}}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{u}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ au point A
On nomme A'' l'image de A par $\overrightarrow{\mathrm{u}}$
On applique cette translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{\mathrm{u}}}$ à l'ensemble des points appartenant à $\mathcal{D}$
On obtient alors $\mathcal{D}''_{(\theta'';\mathrm{r''})}$

Ainsi $\mathcal{D}'_{(\theta';\mathrm{r'})}=\mathcal{D}''_{(\theta'';\mathrm{r''})})$
Et $A \in R_\theta(\mathcal{D}) \Longrightarrow \exists \overrightarrow{\mathrm{u}} / A \in \mathcal{T}_{\overrightarrow{\mathrm{u}}}(D)$

2.2.2 Montrons que $A \in \mathcal{T}_{\overrightarrow{\mathbf{u}}}(D) \Longrightarrow \exists \theta / A \in R_\theta(\mathcal{D})$

On effectue une translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{\mathrm{u}}}$ de $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec O, le centre de $\mathcal{D}$
Soit O', le centre de $\mathcal{D}'$ par $\mathcal{T}_{\overrightarrow{\mathrm{u}}}$
On remarque alors l'angle θ que forme $(O\vec{O}';\vec{i})$
Effectuons maintenant une rotation $R_{(\Omega;\theta)}$ tel que $\mathcal{D}$ viennent se superposer à $\mathcal{D}'$
on voit alors que par translation ou rotation, on aboutit au même disque $\mathcal{D}'$

Conclusion :

$$\mathcal{D}'_{(\theta';\mathrm{r'})}=\mathcal{D}''_{(\theta'';\mathrm{r''})}$$
$$\Longleftrightarrow R_{(\Omega;\theta)}\ (\mathcal{D}_{(\theta;\mathrm{r})}=\mathcal{T}_{\overrightarrow{\mathrm{u}}}\ (\mathcal{D}_{(\theta;\mathrm{r})})$$

Ainsi, par la propriété démontrée précédemment, on ne s'intéressera ici qu'à l'opération consistant à faire une translation.

2.3 Quel est le rayon r_max que peut avoir la souche sachant que le disque est ouvert ?

- Appelons cellule, noté C, l'ensemble de 4 arbres ponctuels de la forêt de Chambord formant un carré de côté 1 ;
- Pour trouver r_{max}, il suffit de trouver le rayon du cercle circonscrit à C ;
- C'est à dire :

$$r_{max}=\frac{c}{2}\ \mathrm{x}\sqrt{2} \text{ avec } c \text{ la longueur du côté du carré ;}$$
$$\text{On a alors } r_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, le rayon r de la souche est dans l'intervalle $]0;\frac{\sqrt{2}}{2}]$

2.4 Résolution par disjonction de cas

D'après l'énoncé, une souche est libre si $\forall p_i$ et $\forall p_f$ qui ne rencontrent pas d'arbres ponctuels, les bûcherons peuvent déplacer la souche de l'une à l'autre.

2.4.1 Cas n*1 : La souche est libre

- La souche est libre si elle peut se déplacer de cellule en cellule sans problème ;
- Or les cellules forment des carrés de côté 1 ;
- Il faut donc que le diamètre maximum d'un disque soit égale à d_{max}=1 $\Longrightarrow r = \frac{1}{2}$
- Ainsi pour circuler d'une cellule à l'autre

$$r_0 \in]0;\frac{1}{2}]$$

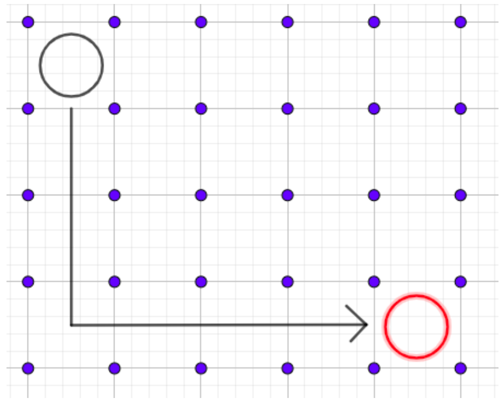

Figure 5: Modélisation d'un déplacement possible d'une souche quand $r_0 \in]0; \frac{1}{2}]$

2.4.2 Cas n*2 : Si $\frac{1}{2} < r_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors la souche n'est pas libre

Démontrons cela à l'aide d'un contre exemple :
Si $r_0 = \frac{1}{2}$ alors le diamètre du disque vaut $\frac{6}{5}$
Or $\frac{6}{5} > 1$
Donc la souche ne pourra pas se déplacer d'une cellule à l'autre. Elle ne pourra faire que de petits déplacements dans sa propre cellule.

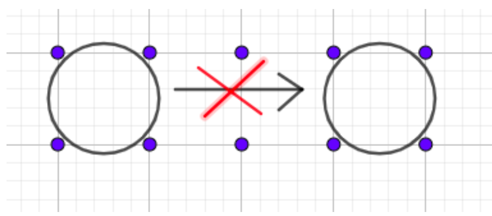

Figure 6: Modélisation d'un déplacement impossible d'une souche d'une cellule à l'autre quand $r_0 > \frac{1}{2}]$

Conclusion : La souche est libre $\forall r_0 \in]0; \frac{1}{2}]$

3 Question 3

Dans la question 1, on a montré qu'on tronc fin de longueur L ne pouvait jamais être bloqué.
Donc, il existe toujours une position initial p_i et une position final p_f pour un tronc fin quelque soit L dans la forêt de Chambord.

3.1 Montrons que $\forall L$, $\mathcal{T}$ est libre

On utilise pour cela la disjonction de cas

3.1.1 Cas n*1 : le plus simple

- D'après la question 2, je sais que la diagonale dans une cellule vaut $\sqrt{2}$
- Ainsi, le tronc fin est libre si $0 < L < \sqrt{2}$ (car le segment n'est pas ouvert)

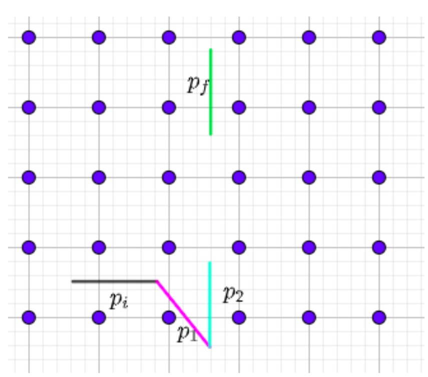

Figure 7: Exemple de situation avec un petit n

3.1.2 Cas n*2 : $L > \sqrt{2}$

Nous savons que pour aller de p_i à p_f, le segments passe par p_n position intermédiaire (avec n un entier naturel)

- Soit un segment de longueur $L > \sqrt{2}$;
- p_i sa position initiale et p_f, sa position finale ;
- Plus L est grand, plus n est grand $\Longrightarrow$ le nombre de positions intermédiaire augmentera donc ;
- **Remarque :** Entre chaque position intermédiaire, les bûcherons applique un mouvement de translation ou de rotation

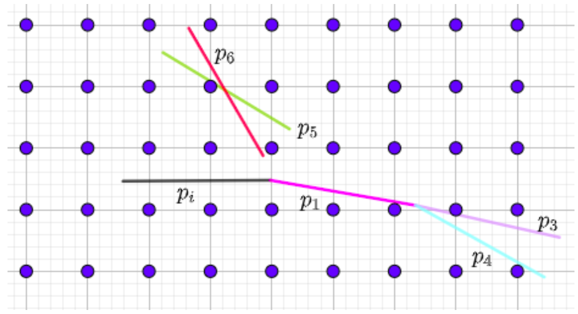

Figure 8: Exemple de situation avec un grande n car $L > \sqrt{2}$

Conclusion : $\forall L \in]0; +\infty[$, le tronc fin est libre

4 Question 4

Résolution par disjonction de cas

4.1 Cas n*1 : Le carré : $E = L$

D'après l'énoncé, on sait que $E \leq L$, dans cette partie, on considérera que $E = L$. Ainsi, le tronc épais est un carré ouvert.
Sachant qu'une cellule est un carré de côté 1, on en déduit que pour pouvoir être libre, E et L, égaux par ailleurs, doivent être inférieur ou égale à 1
Remarque : Quand $E < L \leq 1$ le tronc épais est libre car le périmètre de ce dernier est inférieur au périmètre d'une cellule.

4.2 Cas n*2 : Le rectangle : $E < L$

On arrive à l'hypothèse suivante après avoir réaliser plusieurs modélisations :

$$\text{Si } L = n \text{ alors } E = \frac{1}{E(n)+1} \text{ quand } n \in \mathcal{R}$$
ET
$$\text{Si } L = n \text{ alors } E = \frac{1}{n} \text{ quand } n \in \mathcal{N}$$

Remarque : Les formules ci-dessus couvrent les cas généraux, elles fonctionnent toujours.
Néanmoins, il y a deux exceptions :

- Si $L = \frac{3}{2}$ et $E = \frac{1}{2}$
- Si $L = \frac{5}{4}$ et $E = \frac{3}{4}$

D'après la question 3, nous pouvons en déduire aussi que plus E est petit, plus L peut être grand.

Conclusion : Le tronc épais est libre quand :
1/ si $L = n$ alors $E = \frac{1}{E(n)+1}$; $n \in \mathcal{R}$

2/ si $L = n$ alors $E = \frac{1}{n}$; $n \in \mathcal{N}$

On peut ainsi ajouter que $E \in]0; 1]$ et que $L \in]0; +\infty[$ en respectant les conditions : $E \leq L$ et celles énoncées ci-dessus.

5 Question 5

On nous dit dans l'énoncé que le temps total représente la distance parcourue par un point particulier. Donc si nous devons trouver le temps minimal nécessaire pour déplacer un objet d'un point à un autre, cela signifie que nous devons chercher la distance minimale à parcourir entre deux points données.

5.1 Partie 1 : Le temps minimal pour une souche

Pour tout m et n des entiers avec $n \neq m$
On cherche le temps minimal nécessaire pour déplacer une souche de centre $c(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
Les coordonnées les plus proches où $n \neq m$ qui répondent à la consigne sont :

- $n = 1$ et $m = 2$
  OU
- $n = 2$ et $m = 1$

Dans un plan, la distance la plus courte est d'aller tout droit ;
Dans le cas présent si on veut parcourir un chemin en ligne droite minimale, il faut que $r_0 < \frac{1}{4}$ car au cours de son trajet rectiligne, la distance minimale avec les arbres ponctuels qu'il rencontre est de $\frac{1}{4}$

Calculons la distance parcourue par la souche quand $r_0 < \frac{1}{4}$. Utilisons pour cela le théorème de Pythagore :
D'après les valeurs possible de n et m ;

$$Chemin^2_{rectiligne} = n^2 + m^2$$
$$\iff Chemin^2_{rectiligne} = 1^2 + 2^2$$
$$\iff Chemin_{rectiligne} = \sqrt{5}$$

Le temps minimal pour effectuer un chemin en ligne droite à condition que $r_0 < \frac{1}{4}$, est $\sqrt{5}$

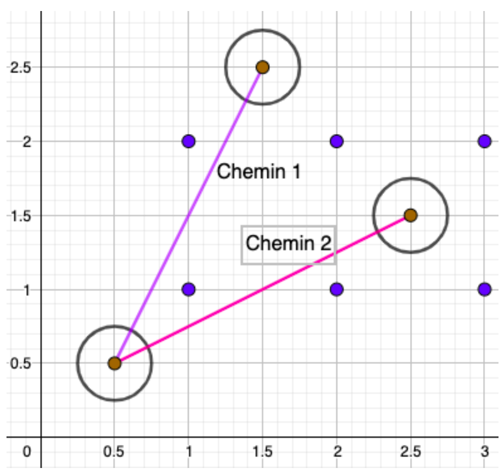

Figure 9: Modélisations des chemins les plus rapides à prendre à condition que $r_0 < \frac{1}{4}$

Calculons maintenant la distance minimale à parcourir pour une souche libre (voir question 2);
Sachant les valeurs possibles de m et n ;

$$Chemin_{souchelibre} = m + n$$
$$\iff Chemin_{souchelibre} = 1 + 2$$
$$\iff Chemin_{souchelibre} = 3$$

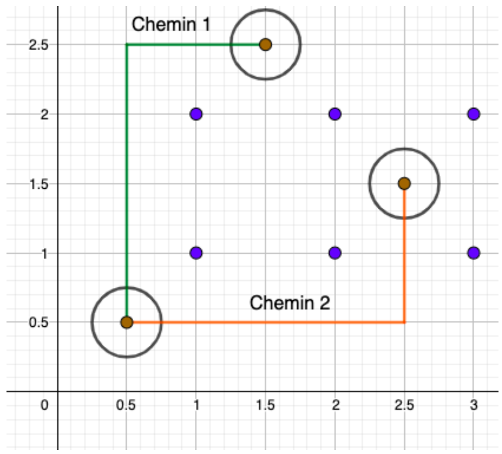

Figure 10: Modélisations des chemins les plus rapides à prendre quand la souche est libre (voir question 2)

Conclusion : Pour une souche de rayon r_0 :
$\sqrt{5} < Temps_{min} < 3$

5.2 Partie 2 : Le temps minimal pour un tronc fin

5.2.1 Cas n*1 : $L < \sqrt{2}$

D'après la question 3, nous avons vu que dans ce cas, le tronc fin est libre dans sa cellule.
Il effectue un demi-tour, c'est à dire une rotation qui a pour centre celui de objet. Comme pour la souche, le point la position le plus proche centrée sur $(n + \frac{1}{2}; m + \frac{1}{2})$ est quand $n = 1$ et $m = 2$ et inversement

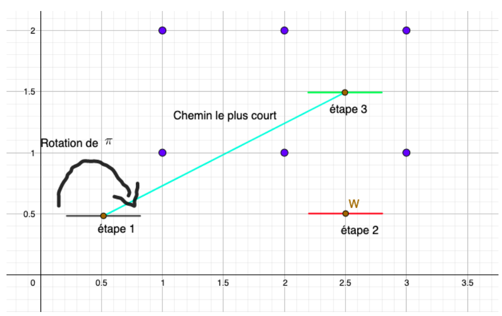

Figure 11: Modélisations des chemin les plus rapides

Ainsi le temps minimale pour ce cas-ci vaut $\sqrt{5}$ (Voir Partie 1 pour le calcul)

5.2.2 Cas n*2 : $L > \sqrt{2}$

Plus L est grand, plus il sera long de faire demi-tour. La distance minimale à parcourir augmentera donc. Ainsi si L tend vers l'infini, le temps minimale pour atteindre la position $(n + \frac{1}{2}; m + \frac{1}{2})$ tendra lui aussi vers l'infini.

Conclusion : Pour un tronc fin de longueur L:
$Temps_{min} \in [\sqrt{5}\ ; +\infty[$

5.3 Partie 3 : Le temps minimal pour un tronc épais

5.3.1 Cas n*1 : $E = L$

D'après la question 4, nous sommes ici en présence d'un carré. Si ce dernier à ces côtés inférieur strictes à $\frac{1}{4}$ alors la distance minimale à parcourir sera de $\sqrt{5}$.
Si les côtes du carré sont entre $\frac{1}{4}$ et 1, alors la distance à parcourir sera de 3.

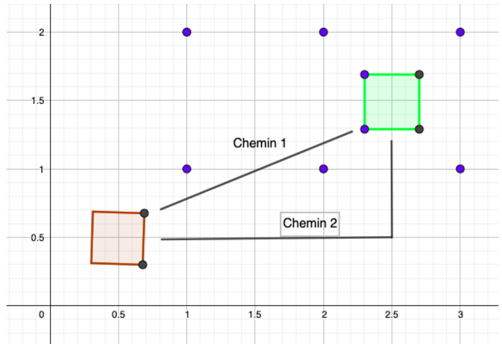

Figure 12: Modélisations des chemin les plus rapides

5.3.2 Cas n*2 : $E < L$

Là encore, il faut reprendre, notre réponse de la question 4. Sachant que si $L = n$ alors $E = \frac{1}{E(n)+1}$ quand $n \in \mathcal{R}$ et si $L = n$ alors $E = \frac{1}{n}$ quand $n \in \mathcal{N}$. Nous pouvons en déduire que selon la longueur du segment de E et de L joue sur le temps minimal nécessaire pour arriver à la position $(n + \frac{1}{2}; m + \frac{1}{2})$.

Conclusion : Pour un tronc fin épais:
$Temps_{min} \in [\sqrt{5} \; ; +\infty[$