$\mathbb{TFJM}^2$

Problème 1 : Création de Puzzles

Les Exp(airs) taumaths

Avril 2020

Contents

Résumé

Nous avons traité les 5 premières questions. Avant de répondre aux trois premières, nous avons posé une C.N.S., expliquant que le nombre de possibilités de remplissage d'une grille est lié à son nombre de "carrés" $k \times k$ vides. Nous nous sommes ensuite servis de ce résultat pour répondre aux 3 premières questions.

Ensuite, avant de nous attaquer à la question 4, qui consiste à reprendre les 3 premières dans une grille carrée, nous avons utilisé la même démarche d'analyse de la situation, et avons déterminé que le nombre de possibilités de remplissages d'une grille est aussi lié, mais d'une manière différente, à son nombre de carrés de k par k vides Nous avons aussi montré que le cas $k = 2$ était particulier, et qu'il admettait d'autres sources de possibilités de remplissages multiples : les boucles. Nous nous sommes servis de ces résultats pour reprendre les 3 premières questions dans la 4.

Enfin, plutôt que de réutiliser les mêmes théorèmes que pour la question 4, nous avons décidé de traiter la 5 sous un angle différent, afin d'avoir une compréhension plus complète du problème.

1 Questions 1, 2 et 3

1.1 Notations

Dans la suite de notre résolution de problème, les notations suivantes seront employées :

- G la grille initiale étudiée
- $(k; n) \in \mathbb{N}^{*2}$ les dimensions de la grille étudiée
- $i \in I(k; n)$ la configuration initiale de la grille, $I(k; n)$ étant l'ensemble des configurations initiales possibles pour une grille de dimensions $(k; n)$
- $p(G)$ le nombre de possibilités de remplissage de la grille G

Une grille G se définit donc par ses deux dimensions et sa configuration initiale, d'où $G = (k; n; i)$ et son nombre de manières de la remplir $p(G)$ est une propriété de celle-ci.

Remarque : L'ensemble des configurations $I(k; n)$ pour une grille de dimensions données $(k; n)$ sera souvent implicitement réduit à I d'après le contexte. Nous noterons aussi i_0 la configuration nulle, c'est-à-dire une grille vide, avec $I^* = I_{/\{i_0\}}$.

Nous opérerons une distinction entre trois types de grilles selon leur dimension $(k; n)$. Une grille est dite :
- "petite" si et seulement si $n < k$. Il s'agit alors d'un rectangle de longueur k et de largeur n.
- "carrée" si et seulement $n = k$. Il s'agit d'un carré de côté k.
- "grande" si et seulement si $n > k$. Il s'agit d'un rectangle de longueur n et de largeur k.

1.2 Modélisation

1.2.1 Grilles vides telles que $n < k$

Une grille est dite *vide* lorsque sa configuration initiale i est nulle : $i = i_0$.

Lemme 1 :

$$\forall (k; n; i_0) \in \mathbb{N}^{*2} \times I, n < k \Rightarrow p(k; n; i_0) = 1$$

Démonstration
Toute grille rectangulaire de longueur k et de largeur $n < k$ ne peut être complétée que de dominos verticaux

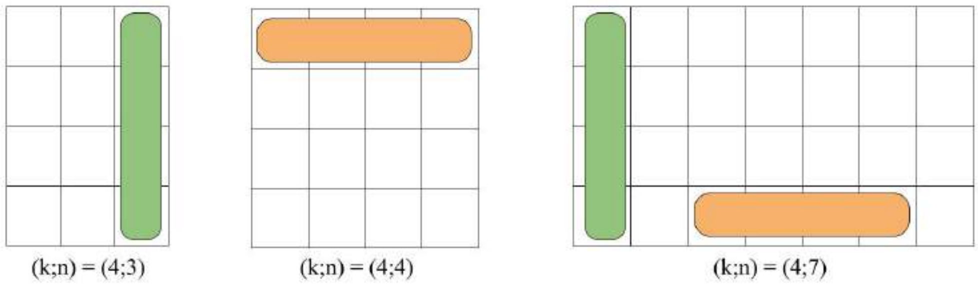


Figure 1: Différents exemples de grilles petite, carrée et grande

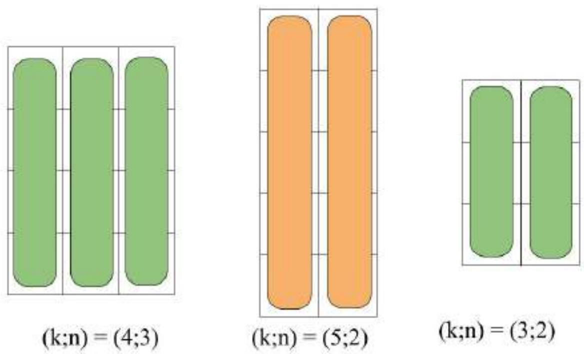


Figure 2: Seuls remplissages possibles de différents exemples de petites grilles

qui dépassent de la grille si disposés horizontalement. Il n'y a donc qu'une seule manière de compléter une petite grille vide.

1.2.2 Grilles vides telles que $n = k$

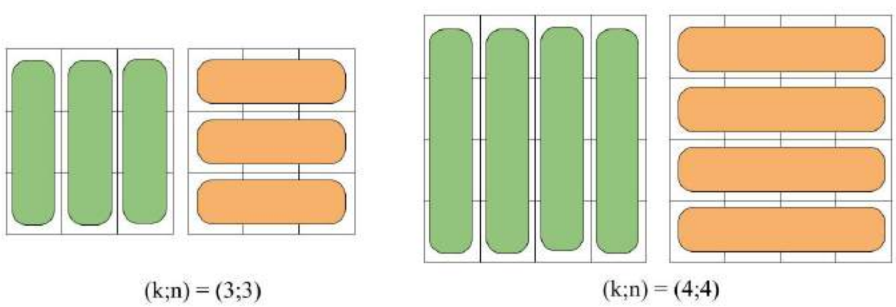


Figure 3: Remplissages doubles possibles de différents exemples de grilles carrées

Lemme 2

$$\forall (k; n; i_0) \in \mathbb{N}^{*2} \times I, n = k \Rightarrow p(k; n; i_0) = 2$$

Démonstration
Toute grille carrée de côté k peut être remplie de k dominos disposés soit horizontalement ou verticalement. Il y a donc deux manières de compléter une grille carrée vide.

1.2.3 Grilles vides telles que $n > k$

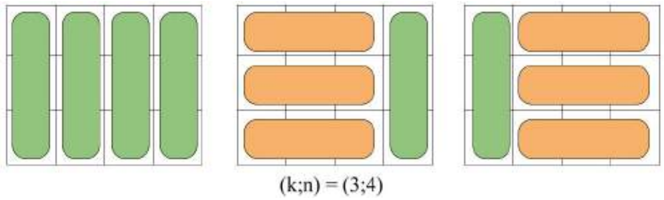


Figure 4: Remplissages possibles d'une grande grille vide

Lemme 3 :

$$\forall (k;n;i_0) \in \mathbb{N}^{*2} \times I, n > k \Rightarrow p(k;n;i_0) > 2$$

Démonstration :
Une grille de dimensions $(k;k+1)$ peut être remplie de trois manières différentes :
- tous les dominos sont verticaux
- un carré $(k;k)$ de dominos horizontaux à gauche et un domino vertical $(k;1)$ à droite
- un domino vertical $(k;1)$ à gauche et un carré $(k;k)$ de dominos horizontaux à droite

Il suffit alors de rajouter $n-(k+1)$ dominos verticaux pour que la grille $(k;n)$ soit complétée sans que cela ne modifie le nombre de remplissages du rectangle $(k;k+1)$ donc de la grille elle-même.

1.2.4 Grilles incomplètes telles que $n \leq k$

Une grille est dite "incomplète" lorsque sa configuration initiale i est non nulle : $i \neq i_0 \iff i \in I^*$. Un domino au moins est présent dans sa configuration initiale.

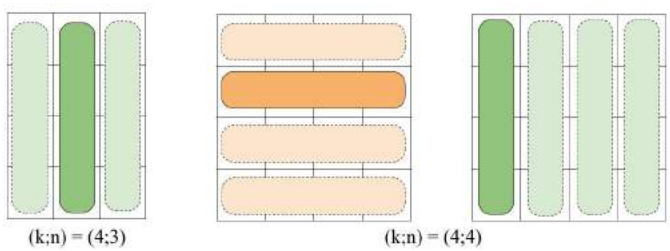


Figure 5: Même exemple avec un domino initial et la seule configuration finale possible

Lemme 4 :

$$\forall (k;n;i) \in \mathbb{N}^{*2} \times I^*, n \leq k,\ p(k;n;i) = 1$$

Démonstration
Cas des petites grilles :
D'après le *Lemme 1*, une petite grille vide ne peut être complétée que d'une seule manière. Donc la présence ou non de dominos initiaux ne modifie pas le nombre de possibilités finales. Les dominos sont nécessairement tous placés verticalement, d'où $\forall (k;n;i) \in \mathbb{N}^{*2} \times I^*, n < k,\ p(k;n;i) = 1$

Cas des grilles carrées :
D'après le *Lemme 2*, une grille carrée vide présente deux possibilités de remplissage. Une grille carrée avec des dominos initiaux soit tous horizontaux ou tous verticaux ne peut donc être complétée que de dominos horizontaux ou verticaux selon. Ainsi, la présence d'au moins un domino initial rend la configuration finale unique : $\forall (k;n;i) \in \mathbb{N}^{*2} \times I^*, n = k,\ p(k;n;i) = 1$

Ainsi, pour toute grille petite ou carrée incomplète, il n'existe qu'une seule manière de la compléter, ce qui conclut.

Remarque : Nous considérons ici qu'une grille initialement déjà complétée présente toujours une manière d'être complétée, c'est-à-dire en n'ajoutant aucun domino. Autrement dit, $i_{complété} \in I$

Les trois premières questions du problème nous invitent ainsi à caractériser le nombre de possibilités pour une grille quelconque avec une certaine situation initiale. La démarche sera désormais de détacher cette grille en d'autres grilles afin de pouvoir étudier son nombre de possibilités de remplissage $p(G)$.

1.2.5 Sous-grille carrée de G

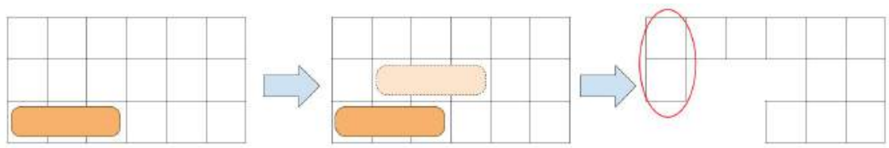


Figure 6: Exemple de grille pour $(k;n) = (3;6)$ avec un domino horizontal initial

Lorsqu'un domino initial est placé horizontalement, un domino parallèle à lui mais non juxtaposé (c'est-à-dire que leurs extrémités soient non alignées) rend la grille incomplétable. Ci-dessus, le domino orange clair non juxtaposé au domino orange foncé crée une impossibilité de remplissage, due à la zone rouge vide qui résulte de son placement dans laquelle on ne peut placer de domino. En effet, compléter une grille avec une certaine configuration initiale revient à remplir une figure vide déduite des dominos initiaux. Il semble ainsi que la seule manière de disposer des dominos parallèles au domino horizontal initial pour que la grille soit valide soit comme ci-dessous :

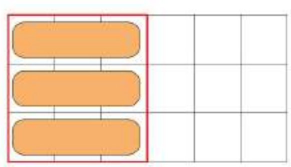


Figure 7: Exemple de grille pour $(k;n) = (3;6)$ avec les dominos horizontaux parallèles

Ainsi, un domino initial horizontal forcera le remplissage final à présenter une grille carrée de dominos horizontaux à l'endroit où il est placé car toute tentative différente de remplissage serait impossible. Cette propriété permet de caractériser dans un premier temps le caractère complétable d'une grille en posant une condition nécessaire : si une grille est complétable, alors celle-ci ne présente aucun domino horizontal parallèle mais non juxtaposé à un autre domino horizontal. Par exemple, les grilles 1 et 2 ci-dessous ne sont pas complétables car les dominos orange et vert ne sont pas juxtaposés et seule la 3 est complétable.
D'autre part, cette propriété permet de caractériser la configuration finale de la grille : le domino horizontal fait partie d'une grille carrée $(k;k)$ de dominos horizontaux. Quelle que soit la configuration initiale supposée complétable, le remplissage de cette zone carrée sera identique, indépendamment du reste de la grille initiale.

Le domino horizontal de la configuration initiale ci-dessus appartient à une sous-grille carrée en rouge de dominos oranges dont le remplissage unique est indépendant des remplissages possibles avec les dominos verts.

Définition : Une sous-grille de G est une portion délimitée de G dont le remplissage est indépendant du reste

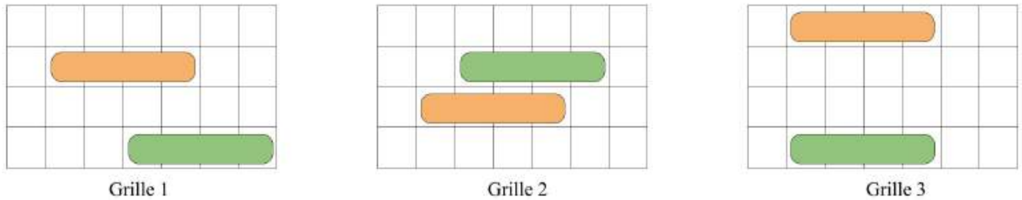


Figure 8: Exemples de grilles initiales pour $(k;n) = (4;7)$

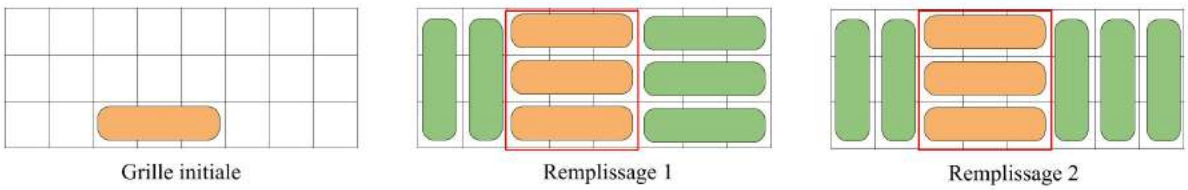


Figure 9: Exemple de grille initiale pour $(k;n) = (3;8)$ avec les deux remplissages possibles

de la grille.

Lemme 4 : Soit G une grille complétable. (sans dépassement, chevauchement et avec juxtaposition des dominos horizontaux entre eux)

Si un domino est placé horizontalement dans G, alors il existe une sous-grille carrée de G dont il fait partie

Démonstration :
Par l'absurde, supposons que le domino horizontal ne fait pas partie d'une sous-grille carrée. Donc au moins un domino est placé à cheval sur la zone de la sous-grille et une zone à l'extérieur de cette dernière. Il se créé ainsi un décalage de juxtaposition entre les deux lignes parallèles de dominos. Or pour compléter la grille, les dominos verticaux ne peuvent combler ce décalage car prennent toute la largeur de la grille. D'autre part les dominos horizontaux ne peuvent que prolonger le décalage sur une ligne. Puisque ce décalage ne peut être comblé, la grille n'est pas complétable. Or elle l'est supposée précédemment, ce qui est absurde.

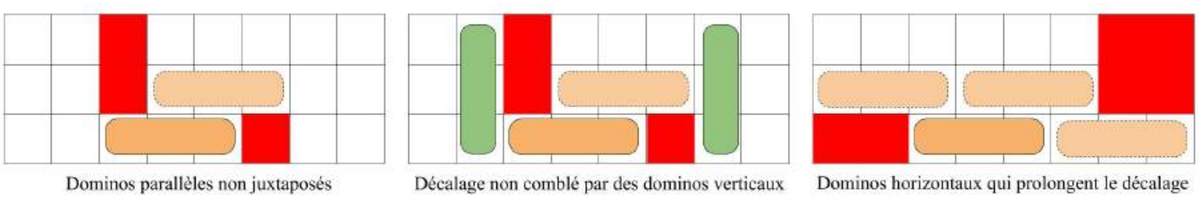


Figure 10: Exemple de décalage pour une grille telle que $(k;n) = (3;8)$

1.2.6 Décomposition en sous-grilles de G

L'opération qui associe à l'ensemble ordonné de sous-grilles la grille initiale, appelée concaténation, consiste à apposer les différentes sous-grilles dans un ordre donné. L'opérateur concaténaire sera noté $[+]$ et la somme concaténaire $[\sum]$

Théorème 1 : Soit G une grille complétable

$$\exists D = \{S_1, ..., S_m\}\,, m \in [\![1;n]\!], G = [\sum_{i=1}^{m} S_i],$$

$$\forall i \in [\![1; m]\!], S_i = (k; n; i), n \leq k \ ou \ S_i = (k; n; i_0), n > k$$

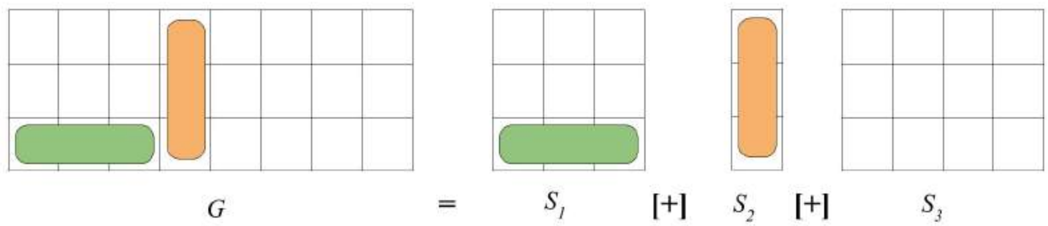


Figure 11: Exemple de décomposition d'une grille pour $(k; n) = (3; 8)$

Démonstration
Dans une configuration initiale complétable d'une grille donnée, les dominos sont placés horizontalement ou verticalement :
- Si un domino est placé verticalement, alors il prend toute la largeur de la grille et la sépare en trois sous-grilles indépendantes.
- Si un domino est placé horizontalement, alors d'après le *Lemme 3* il existe dans le remplissage final une sous-grille carrée de dominos horizontaux qui sépare également la grille en trois sous-grilles indépendantes.

Ainsi, tous les dominos initiaux séparent la grille en plusieurs sous-grilles quelconques S petites, carrées ou grandes. Or si une grande sous-grille est incomplète, alors elle présente des dominos initiaux verticaux ou horizontaux qui vont à nouveau la décomposer en d'autres sous-grilles de dimensions plus petites. Les grandes sous-grilles qui décomposent G ne peuvent qu'être vides. Une grille complétable G présente donc une décomposition D en sous-grilles petites et carrées quelconques (vides ou incomplètes) mais aussi des grandes sous-grilles vides. Ce nombre de sous-grilles noté m est compris entre 1, nombre minimum d'une grande grille et n, nombre maximum de dominos verticaux, c'est-à-dire de petites sous-grilles.

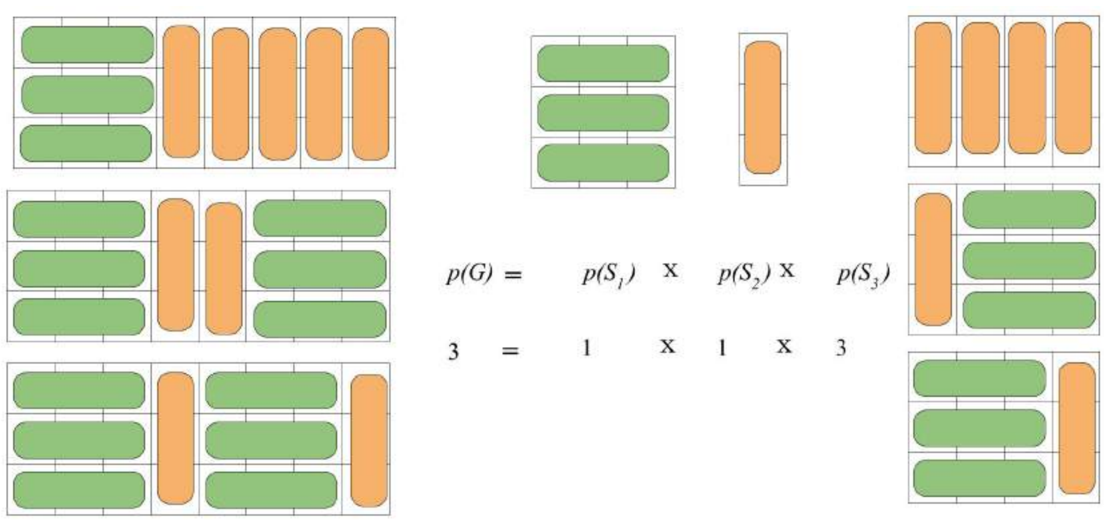


Figure 12: Nombre de possibilités de remplissage de l'exemple précédent

Théorème 2 : Soit G une grille complétable et $D = \{S_1, ..., S_m\}$ une décomposition possible de G

$$p(G) = \prod_{i=1}^{m} p(S_i)$$

Démonstration
D'après le *Théorème 1*, toute grille complétable G peut être décomposée en sous-grilles dont le remplissage est par définition indépendant des autres. Soit $D = \{S_1, ..., S_m\}$ une décomposition possible de G. Pour la première sous-grille S_1 on a $p(S_1)$ choix de remplissages. Or pour la deuxième sous-grille S_2 on a $p(S_2)$ choix, donc $p(S_1) \times p(S_2)$ pour la grille $S_1[+]S_2$. En prolongeant, on a $p(S_1) \times p(S_2) \times ... \times p(S_{m-1}) \times p(S_m)$ pour $S_1[+]S_2[+]...[+]S_{m-1}[+]S_m$. Donc le nombre de remplissages d'une grille avec une configuration initiale donnée est le produit du nombre de possibilités de remplissages de chaque sous-grille S de G.

1.3 Résultats

1.3.1 C.N.S. pour caractériser le nombre de possibilités de complétion d'une grille G

Théorème 3 : Soit G une grille complétable et $D = \{S_1, ..., S_m\}$ une décomposition possible de G

$$p(G) \geq 2 \iff \exists S_\alpha \in D, \alpha \in [\![1; m]\!],\ S_\alpha = (k; n; i_0), n \geq k$$

Autrement dit, une grille est complétable d'au moins deux manières, si et seulement s'il existe une grille grande ou carrée vide dans sa décomposition en sous-grilles.

Démonstration
Condition nécessaire :
$p(G) \geq 2 \Rightarrow \prod_{i=1}^{m} p(S_i) \geq 2$ d'après le *Théorème 2*
$p(G) \neq 0$, d'où $\forall i \in [\![1; m]\!], p(S_i) \geq 1$
Donc $\exists S_a \in D, p(S_a) \geq 2$
Or le *Théorème 1* nous permet de dire que G est décomposée en sous-grilles petites et carrées vides ou incomplètes et grandes vides, d'où les quatre possibilités suivantes :

$$\begin{cases} (1) \quad S_a = (k; n; i_0), n < k \Rightarrow p(S_a) = 1 \quad (\textit{Lemme 1}\ ) \\ (2) \quad S_a = (k; n; i_0), n = k \Rightarrow p(S_a) = 2 \quad (\textit{Lemme 2}\ ) \\ (3) \quad S_a = (k; n; i_0), n > k \Rightarrow p(S_a) > 2 \quad (\textit{Lemme 3}\ ) \\ (4) \quad S_a = (k; n; i \neq i_0), n \leq k \Rightarrow p(S_a) = 1 \quad (\textit{Lemme 4}\ ) \end{cases}$$

(1) et (4) $\Rightarrow p(S_a) < 2$ donc en contraposant, $p(S_a) \geq 2 \Rightarrow$ (2) et (3)
Ainsi $S_a = (k; n; \iota_0)$ avec $n = k$ ou $n > k$
Donc il existe une sous-grille S_a grande ou carrée vide dans la décomposition D de G

Condition suffisante :
D'après les (1), (2), (3) et (4) précédents qui résultent du *Théorème 1* et des *Lemmes 1 à 4*, on a : $\forall i \in [\![1; m]\!],\ p(S_i) \geq 1$
Or $\exists S_\alpha \in D, \alpha \in [\![1; m]\!],\ S_\alpha = (k; n; \iota_0), n \geq k \Rightarrow p(S_\alpha) \geq 2$ d'après les *Lemme 2* et *3*
Ainsi $\prod_{i=1}^{m} p(S_i) = p(G) \geq 2$

1.3.2 Question 1

Démonstration
Dans la question 1, Laetitia place les dominos initiaux de sorte à ce que la grille soit complétable et qu'un carré de dimensions $(k; k)$ soit toujours libre. Il existe donc une grille carrée vide dans la décomposition D de G. Or d'après la condition suffisante du *Théorème 3*, $\exists S_\alpha \in D, \alpha \in [\![1; m]\!],\ S_\alpha = (k; k; \iota_0) \Rightarrow p(G) \geq 2$
Donc quelle que soit la configuration initiale, la présence d'une grille carrée vide implique nécessairement la possibilité de compléter d'au moins deux manières la grille.

Dans la figure ci-dessous, les dominos initiaux en orange et vert foncé laissent vide une sous-grille carrée qu'il est possible de remplir de deux manières. Les dominos orange et vert clair en pointillés sont ceux qui sont nécessairement placés tels quels dans la configuration finale. Pour la grille $(3;8)$, le carré peut être positionné de deux manières différentes : on aura $2 \times 2 = 4$ manières de remplir la grille. Pour la grille $(4;9)$, il n'y a qu'un carré vide possible, donc il y aura 2 possibilités de remplir la grille.

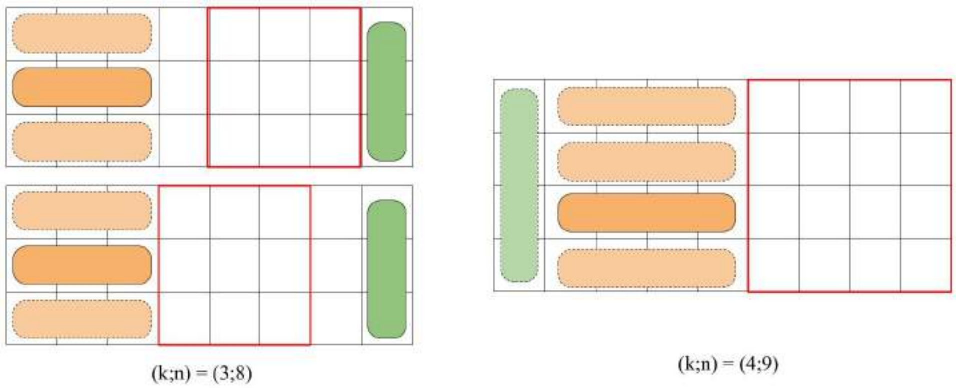


Figure 13: Exemples de grilles initiales dans lesquelles un carré est toujours laissé vide

1.3.3 Question 2

Démonstration

Dans la question 2, Laetitia doit placer le minimum de dominos de sorte à ce qu'il n'y ait qu'une seule manière de compléter la grille. Or d'après le *Théorème 3*, $p(G) \geq 2 \iff \exists S_\alpha \in D, \alpha \in [\![1;m]\!],\ S_\alpha = (k;n;\iota_0)$ avec $n \geq k$ En contraposant, on a $p(G) = 1 \iff \nexists S_\alpha \in D, \alpha \in [\![1;m]\!],\ S_\alpha = (k;k;\iota_0)$ avec $n \geq k$ (car $p(G) \neq 0$ et $p(G)$ positif par définition). Autrement dit, il ne peut y avoir aucune sous-grille carrée grande ou vide dans la grille initiale. La décomposition D de G admet alors uniquement des grilles petites quelconques ou des grilles carrées incomplètes. Or le minimum de dominos par sous-grille pour qu'elle soit incomplète vaut 1, ainsi pour placer le moins de dominos il faudra le moins de sous-grilles possibles. Toutes les sous-grilles seront alors carrées car elles prennent plus d'espace qu'un même nombre de petites sous-grilles. Le maximum de sous-grilles carrées dans une grille $(k;n;i_0)$ vaut $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ donc il faut et il suffit de placer au minimum $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ dominos pour qu'il n'y ait qu'une seule manière de compléter la grille.

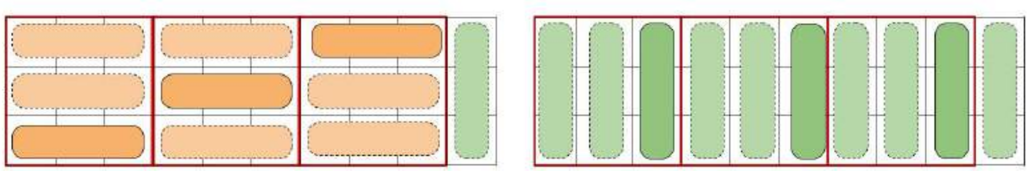


Figure 14: Exemple de grille initiale complétable d'une seule manière

Si Laetitia place ces $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ dominos tels que chaque domino fait partie d'une sous-grille carrée différente de sorte qu'aucune grille carrée ou grande ne soit laissée vide, alors il n'y aura qu'une seule possibilité de remplissage de la grille. Les dominos finaux se placeront nécessairement dans les sous-grilles carrées compléteront la ou les petites sous-grilles restantes. Ainsi, plus simplement, il suffit par exemple alors de "tapisser" comme ci-dessous la grille de $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ dominos horizontaux.

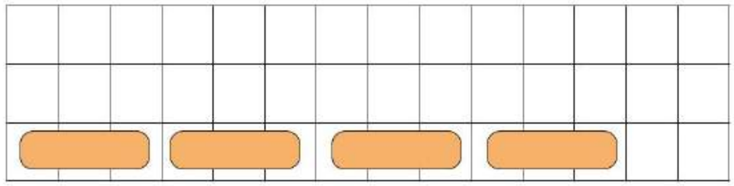


Figure 15: Autre exemple simple de grille initiale complétable d'une seule manière

1.3.4 Question 3

Démonstration
Dans la question 3, Laetitia doit placer le maximum de dominos de sorte à ce qu'il y ait au moins deux manières de remplir la grille. Le maximum de dominos valides qu'il est possible de placer dans une grille vaut n. Or d'après le *Théorème 3*, $p(G) \geq 2 \iff \exists S_\alpha \in D, \alpha \in [\![1;m]\!],\ S_\alpha = (k;k;\iota_0)$ Autrement dit, cela équivaut à ce qu'une sous-grille carrée ou grande soit laissée vide. La grille carrée contient moins de dominos qu'une grande grille donc le minimum de dominos à retirer vaut k. Ainsi il faut et il suffit de placer le maximum de $n-k$ dominos pour qu'il y ait au moins deux manières de compléter la grille.

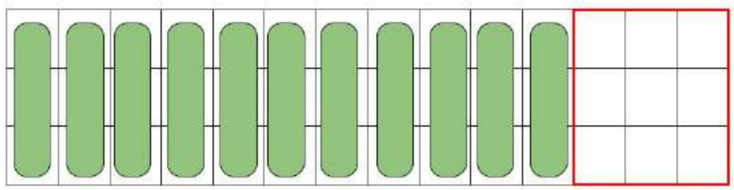


Figure 16: Exemple simple de grille complétable d'au moins deux manières

1.3.5 Piste de recherche : Nombre de remplissages d'une grande grille vide

Ce résultat n'est pas demandé ou nécessaire pour la résolution du problème, mais il semble intéressant de pouvoir dénombrer précisément le nombre de remplissages d'une grille. Les seules sous-grilles qui décomposent G dont nous n'avons pas caractérisé le nombre de remplissages possibles sont les grandes sous-grilles vides.

Lemme 3 bis :

$$\forall (k;n;i_0) \in \mathbb{N}^{*2} \times I, \Rightarrow p(k;n;i_0) = \sum_{c=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \frac{\prod_{i=1}^{c} n - ck + i}{c!} + 1$$

2 Question 4

Il s'agit maintenant de savoir si les résultats trouvés aux trois questions précédentes sont aussi applicables dans le cas d'une grille de n par n cases, avec n un multiple positif de k. Nous allons donc reprendre une à une chaque question.

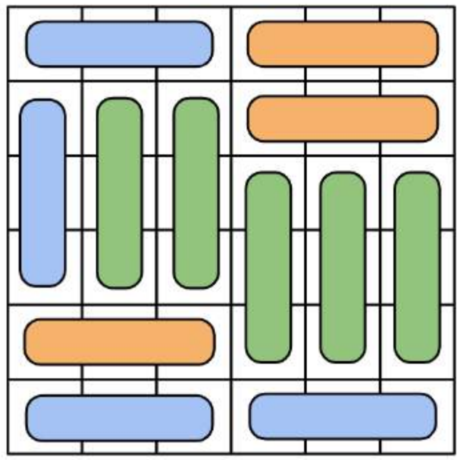
2.1 Notations:

Nous utiliserons dans la suite de la question les notations et appellations suivantes:
- Nous noterons $I^2(k;n)$ l'ensemble des configurations de grille complétables de dimensions n par n, avec n un multiple de k et $k \in [\![2;+\infty[\![$.
- Nous appellerons une région tout sous-ensemble de la grille complétée seulement par Laetitia, qui n'est pas séparé par des dominos.

-Nous appellerons ”couloirs” tout ensemble de cases voisines pouvant être rempli par des dominos dans la même direction, et ”intersections” les zones ou 2 couloirs de directions différentes se rencontrent.
-Lorsque nous parlerons de multiples, nous évoquerons uniquement les multiples positifs, pour être cohérent avec la situation réelle du problème.

2.2 Représentations graphiques:

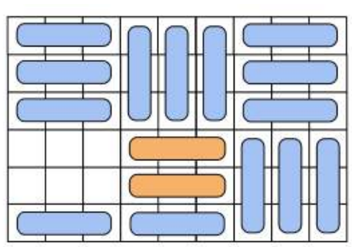
Nous utiliserons dans cette question les mêmes dominos que dans les questions précédentes, en colorant ceux posés par le joueur en orange s'ils sont horizontaux, et vert s'ils sont verticaux. Les dominos posés par Laetitia, eux, seront représentés en bleu.



Exemple d'une grille complétable et complétée, avec $n = 6$ et $k = 3$.

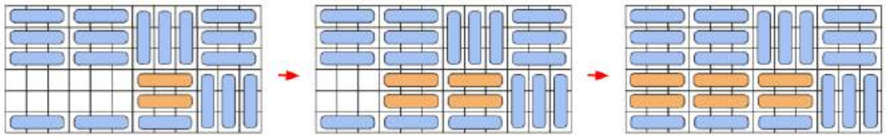
2.3 Sources de possibilités multiples:

En passant d'une grille en simple couloir à une grille carrée, il se pourrait que de nouvelles sources de possibilités de remplissage multiples apparaissent. Les carrés de k par k sont toujours remplissables de 2 manières différentes, du moins lorsqu'ils sont isolés (nous montrerons plus tard que ce n'est pas toujours le cas). Essayons de chercher des sources multiples possibilités autres que ces carrés de k par k. Nous considérerons à présent des grilles dans lesquelles Laetitia fait en sorte de ne pas laisser vides de telles régions, nous appellerons ces grilles des grilles serrées.
Les grilles serrées sont donc des grilles préparées par Laetitia dont les régions sont des réseaux de ”couloirs” et ”d'intersections”. Puisqu'il ne peut y avoir de carré de k par k, les dominos d'un couloir ne peuvent être rangés que dans une direction possible. Si un couloir possède une extrémité, les dominos sont comme ”aspirés” par cette extrémité, c'est à dire qu'ils doivent s'y coller pour remplir la grille et ne pas laisser de cases vides. Ces dominos plaçables aux extrémités de couloirs sont donc les premiers que le joueur peut placer en étant sûr qu'ils le soient bien, puisqu'ils ne le peuvent être que d'une seule façon.



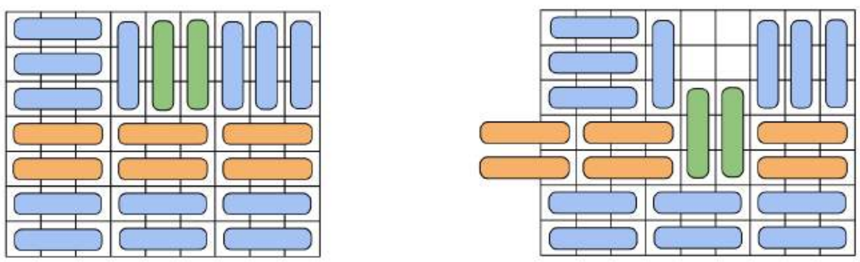
Exemple d'une extrémité de couloir avec $k = 3$.

Une fois le couloir rempli à son extrémité par des dominos, il peut être vu comme un couloir plus petit en longueur de k cases, ayant une nouvelle extrémité, non constituée de dominos de Laetitia cette fois-ci, mais de dominos du joueur. En appliquant la même logique, le joueur peut donc remplir à nouveau l'extrémité du couloir raccourci, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le couloir soit pleinement rempli.



Exemple de remplissage d'un couloir avec $k = 3$.

Ainsi dans une grille serrée quelconque, tout couloir possédant une extrémité n'est remplissable que d'une seule manière.
Intéressons nous maintenant aux intersections. A priori l'on pourrait se dire que les dominos y peuvent être placés d'au moins 2 façons différentes, qui correspondent aux orientations des dominos des deux couloirs qui s'y rencontrent. Supposons une intersection entre deux couloirs, dont l'un possède une extrémité, c'est à dire que sa configuration est déterminée comme vu précédemment. Pour que la grille soit complétable, il faut nécessairement qu'il existe au moins une configuration qui puisse la remplir. L'intersection peut donc être remplie avec des dominos dans l'une des orientations possibles.

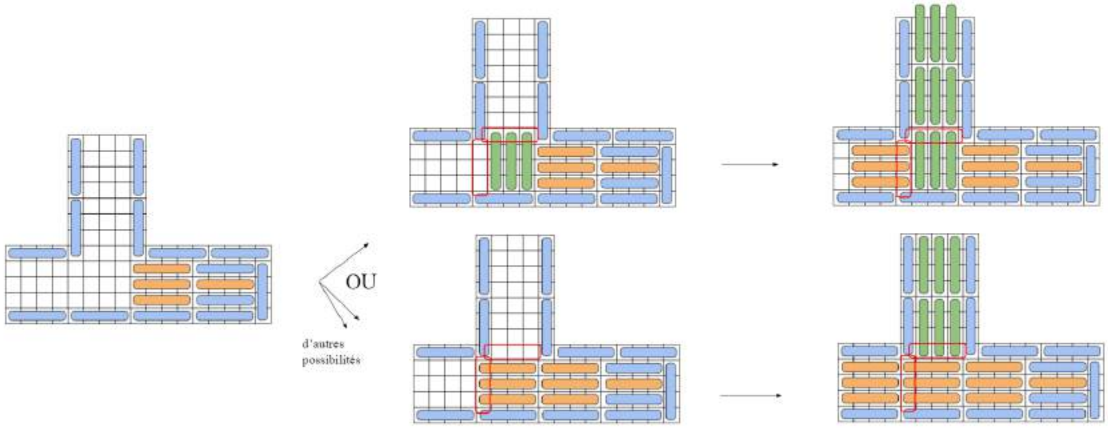


Possibilité 1 Possibilité 2

Exemple d'intersection avec 2 possibilités de remplissage avec $k = 3$.

Remarque: Cet exemple montre qu'une intersection, en fonction de sa configuration, peut relier plusieurs nombres de couloirs, ici 2 pour la possibilité 1 et 3 pour la possibilité 2.

Au moins l'une des possibilités est juste pour une grille remplissable. En déplaçant les dominos dans une intersection pour la remplir selon une autre configuration, on crée une "perturbation". Pour étudier cela reprenons notre ordre de remplissage: nous avons commencé par un couloir ayant une extrémité, et nous l'avons rempli. Si le couloir n'est pas isolé, alors nous arrivons à l'autre bout de ce couloir, ou entre ses deux bouts, à une intersection. A cette intersection, plutôt que de choisir une configuration dont on sait qu'elle fonctionne, on choisit d'en prendre une quelconque autre. Là, une fois l'intersection remplie, les couloirs qui y sont connectés se voient apparaître des extrémités. Ce sont justement ces extrémités, créées par les dominos du joueur, dont la configuration change. Ainsi en changeant l'intersection, on change les extrémités du ou des couloirs connectés, et on change donc les configurations de ces couloirs, et ainsi de suite. On dira donc que la perturbation se propage.

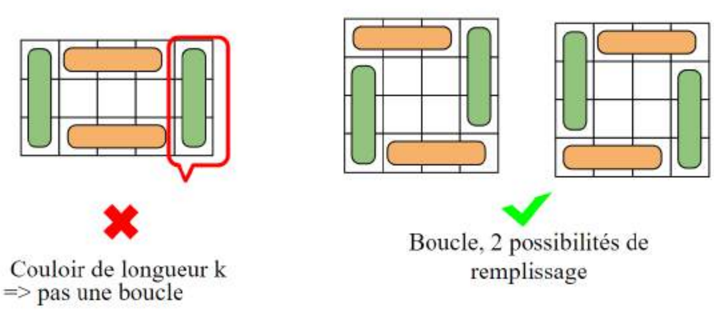


Exemple de remplissage à partir d'une extrémité de couloir, avec 2 configurations d'intersection différentes. $k = 4$. En rouge sont entourés les extrémités de couloirs créées par l'intersection.

Remarque: De nombreuses autres configurations sont possibles pour remplir cette intersection, chacune correspondant à des configurations d'extrémités différentes.

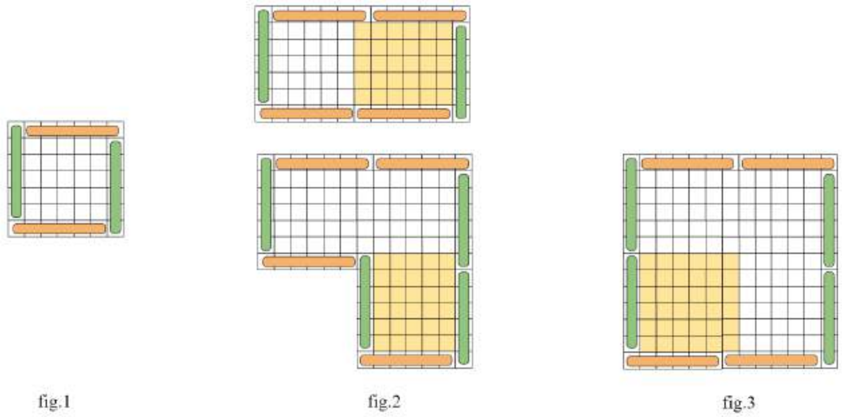
Ici, 2 cas de figure se profilent. Soit il existe des moyens pour une perturbation de revenir à son point de départ et de s'annuler [1], cas qui nécessiterait la présence de boucles dans les régions, soit la perturbation ne peut boucler, auquel cas elle sera amenée à une contradiction, car elle arrivera nécessairement au niveau d'un couloir ayant une extrémité [2], (l'absence de boucle implique la présence de couloirs à extrémités), et comme nous l'avons montré, ces couloirs n'admettent qu'une seule configuration possible.

Montrons qu'il ne peut y avoir dans une grille complétable de boucle. Par boucle, nous entendons forme constituée de dominos de telle sorte que chaque extrémité de domino soit reliée à l'extrémité d'un autre domino. De plus, la région occupée par la boucle ne peut pas avoir, dans un couloir de d dominos, moins de $dk + 1$ cases. Par exemple, on peut, avec des dominos de $k = 3$ former une boucle comme ceci:



Exemple de boucle avec $k = 3$.

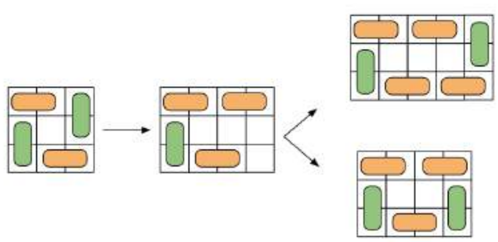
Cependant sur cet exemple, on voit bien que l'intérieur de la boucle n'est pas remplissable. Pour que la boucle soit réalisable, il faut nécessairement que son intérieur soit complétable pour Laetitia. Pour cela, il faut nécessairement que sa surface soit un multiple de k.
Partons d'une boucle la plus petite possible. Avec seulement 4 dominos. Sa surface est de $(k-1)^2$ (fig.1). Si l'on étend la boucle, en la gardant bien sûr toujours fermé, en étirant un de ses côtés par exemple, sa surface croît de $k(k-1)$ (fig.2). Si l'on étend la boucle entre deux faces orthogonales, sa surface croît de k^2 (fig.3).



Exemples de boucles avec $k = 6$.

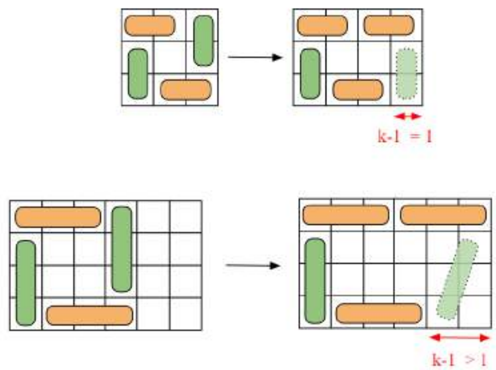
Ainsi, peu importe la déformation subie par la boucle, sa surface sera toujours la somme de $(k-1)^2$ et d'un multiple de k.
Or $\forall k \in \mathbb{N}, n > 1, (k-1)^2 \not\equiv 0[k]$.
Ainsi, la surface d'une boucle ne peut pas être multiple de k, et ne peut donc pas être remplissable. Il n'est donc pas possible de former de telles boucles avec des dominos pour créer une grille remplissable. Ainsi, s'il n'est pas possible de réaliser de boucles de 1 domino de largeur, il n'est pas possible de créer de boucles plus larges, puisque cela impliquerait la présence d'au moins une boucle de 1 domino de largeur pour la constituer.
Ainsi il n'est pas possible pour une perturbation quelconque de boucler et de se compenser. Nous sommes donc dans le cas [2], c'est à dire que toute perturbation dans la grille mène à une contradiction absurde. Ainsi, il n'existe qu'une façon de remplir une grille serrée.

Exception du cas $k = 2$:
En faisant des tests avec $k = 2$, nous nous sommes rendu compte que nos déclarations précédentes ne valaient pas. En effet, en essayant de former des boucles comme précédemment avec $k = 2$, il apparaît un cas où il est possible de créer une boucle à l'intérieur complétable:

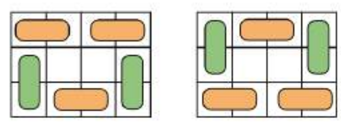


Exemples de boucles avec $k = 2$.

En effet au moment d'élargir la boucle par un domino, il est possible, plutôt que d'en rajouter 2 pour fermer la boucle, de n'en rajouter qu'un seul, comme sur la boucle du bas de l'exemple précédent.
Alors pourquoi cela n'est-il pas possible pour les k supérieurs à 2 ? En ouvrant la boucle, comme sur la deuxième étape du schéma ci-dessus, l'écart longitudinal entre les 2 dominos de l'ouverture de la boucle est de $k-1$. Dans le cas où $k = 2$, cet écart est de $2-1 = 1$, qui est égal à la largeur d'un domino. Il est donc possible d'en placer un pour combler le vide et fermer la boucle. Le schéma suivant explicite cette exclusivité du cas où $k = 2$.



Ainsi $\forall k > 2$, réaliser une telle boucle complétable n'est pas possible.
Les grilles avec $k = 2$ peuvent donc contenir des boucles. L'exemple suivant montre qu'il existe au moins 2 configurations possibles pour une boucle autour de 1 domino central (qui ici n'est pas représenté).



Boucle avec $k = 2$ et ses 2 possibles configurations.

De manière générale, les boucles que peuvent contenir les grilles avec $k = 2$ sont des régions qui ne possèdent pas d'extrémité. Elles n'ont donc aucun couloir qui ne puisse être rempli d'une seule manière, et elles peuvent donc l'être d'au moins 2 manière.
L'implication ($p(i) > 1 \Longrightarrow$ présence de carrés k par k vides) est donc fausse pour $k = 2$, pour la rendre vrai il faut écrire:

Théorème 4: $\forall i \in I^2(k;n)$ avec $k = 2, p(i) > 1 \Longrightarrow$ présence de carrés de k par k vides ou de boucles.

Dans le cas général où $k \neq 2$, on utilisera donc:

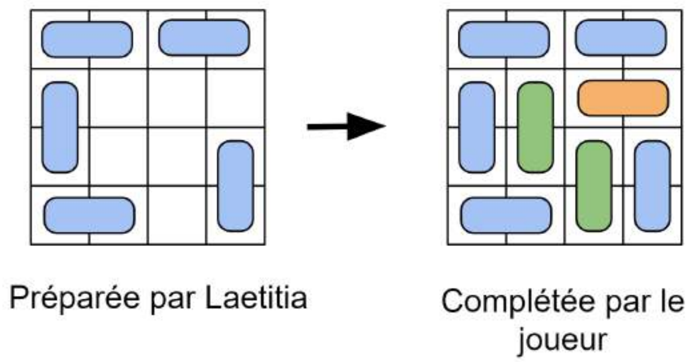
Théorème 5:$\forall i \in I^2(k;n), k > 2, p(i) > 1 \Longrightarrow$ présence d'au moins un carré vide de k par k.

Les réciproques de ces théorèmes ne fonctionnent que en parlant de carrés de k par k vides isolés, car nous n'avons pas prouvé que la présence de carrés non isolés impliquait la multiplicité des possibilités de remplissage.

2.4 Reprise de la question 1:

Nous appellerons P_1 la proposition, pour k et n donnés: "Si Laetitia laisse au moins un carré de k par k vide, alors il y a toujours au moins deux façons de compléter la grille de côté n.".

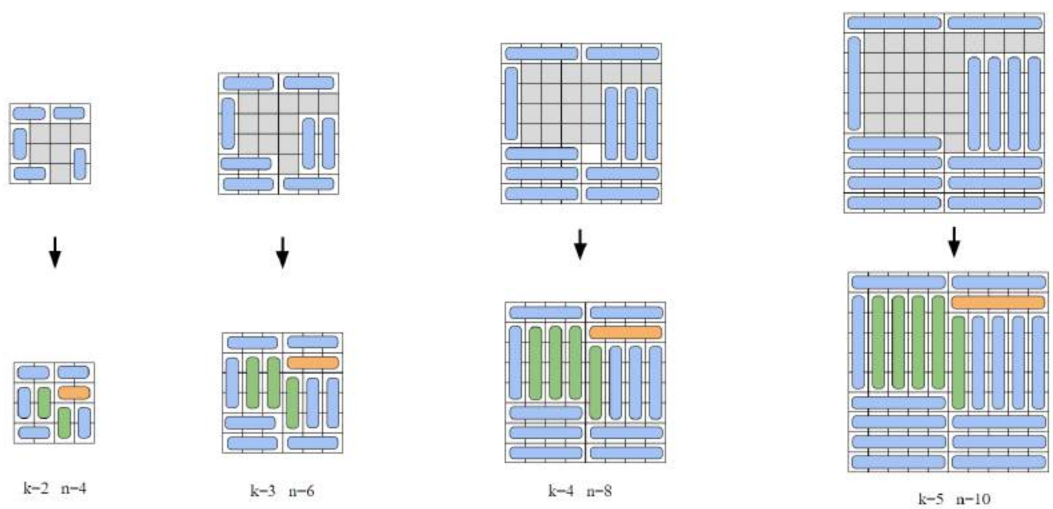
A première vue, on pourrait se dire que les réciproques des théorèmes 4 et 5 sont vraies, c'est à dire que la présence de carrés vides de k par k implique qu'il y ait plusieurs possibilités de remplissage.
Toutefois, si le fait qu'un carré vide isolé puisse en lui-même toujours être rempli de 2 manières, qu'en est-il s'il n'est pas isolé ? En effet, on pourrait imaginer que les cases voisines du carré, "forcent" d'une certaine façon la position des dominos dans le carré vide.
En faisant quelques essais pour trouver une telle configuration, nous trouvons pour $k = 2$ et $n = 4$ la grille complétable suivante:



Cette grille, bien que possédant un carré de k par k vide, n'est remplissable que d'une seule façon. En effet, la case vide sur la bordure droite ne peut être remplie que par un domino horizontal. Ensuite, il ne reste plus qu'une façon ne disposer les dominos verticaux dans les cases vides. Ainsi, pour $k = 2$ et $n = 4$, P_1 est faux.

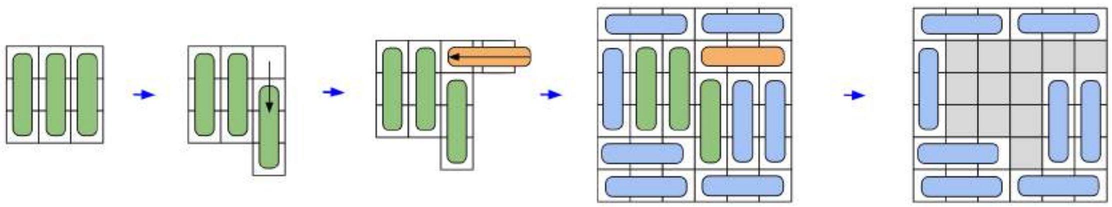
2.4.1 Propagation de ce résultat sur k:

Il existe donc une configuration forçant un carré vide de k par k à ne pouvoir être rempli que d'une manière, si $k = 2$. En essayant avec des k plus grands, nous sommes arrivés à penser qu'il existait toujours une telle configuration, peu importe le k:



Exemples de grilles avec carré de k par k vide complétable d'une seule manière.

Pour produire ces configurations, nous avons recopié le même motif, en partant d'un carré de k par k rempli de dominos de joueurs verticaux, parmi lesquels nous baissons celui qui est le plus à droite de une case, puis remplissons cette case par l'extrémité gauche d'un domino horizontal. On entoure ce motif de dominos bleus jusqu'à former une grille complétée de coté $n = 2k$, puis on retire les dominos de joueurs précédemment posés. Ce processus est résumé par le schéma suivant, avec $k = 3$.

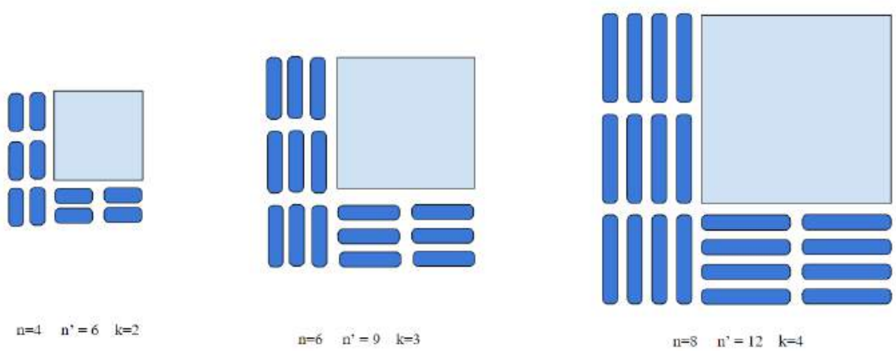


Remarque: Ici, nous ne nous occupons pas de n, nous cherchons seulement, pour un k donné, une configuration telle qu'un carré vide de k par k ne puisse être remplie que d'une manière.
En entourant ainsi le motif formé avec les dominos de Laetitia, nous arrivons toujours dans nos exemples à former des grilles complétables avec $n = 2k$.

Théorème 6: $\forall k \in \mathbb{N}, k > 1, \exists i \in I^2(k;n)$, avec $n = 2k$, tel que la grille ait un carré de $k \times k$ vide, et qu'elle ne puisse être complétée que d'une manière.

2.5 Propagation du résultat sur n:

Il semble donc qu'il existe pour tout k au moins un n qui rende P_1 fausse. En continuant nos essais en augmentant n tout en gardant k constant, on se rend compte qu'il est possible "d'entourer" toute grille avec des dominos de Laetitia, de telle sorte que la grille possède toujours autant de cases vides, et toujours autant de façons d'être complétée, mais avec un n augmenté de k, comme le montre ce schéma:



Ici, les carrés bleus clairs représentent des grilles quelconques de n par n

En effet, il est toujours possible d'ajouter une colonne de n dominos de large, et $n+1$ de hauteur à gauche, et une ligne en bas de n dominos de hauteur, pour $n-1$ de largeur.

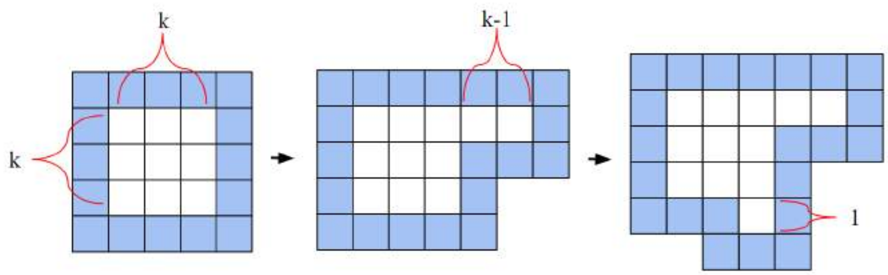
Théorème 7: $\forall i \in \grave{I}^2(k;n), \exists i' \in \grave{I}^2(k;n+k)$ tel que si c carrés vides de $k \times k$ sont présents dans i, alors c le seront aussi dans i', et $p(i) = p(i')$.

2.5.1 Démonstration des théorèmes:

Théorème 6:

Montrons que pour tout entier k supérieur à 2, il existe une configuration initiale pour une grille de $n = 2k$, avec un carré de k par k vide, telle qu'elle ne puisse être remplie que d'une seule façon.
Considérons un carré vide de k par k, entouré de dominos de Laetitia dans des positions quelconques. Ce

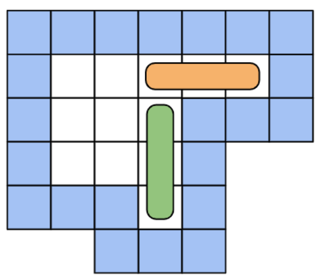
carré peut donc être rempli de 2 manières. A présent, perçons ce carré à droite de son sommet supérieur droit, pour ajouter un "cavité" de 1 de hauteur, par $k-1$ de longueur. La surface de cette région est donc de $k^2+(k-1)$, ce qui n'est pas un multiple de k. On rajoute donc ensuite 1 case vide précisément en dessous de la case du sommet inférieur droit, ce qui nous amène à une surface vide de $k^2+(k-1)+1=k(k+1)$, qui cette fois-ci est bien un multiple de k.



Ici, les cases bleues représentent des cases occupées par un point de domino posé par Laetitia.

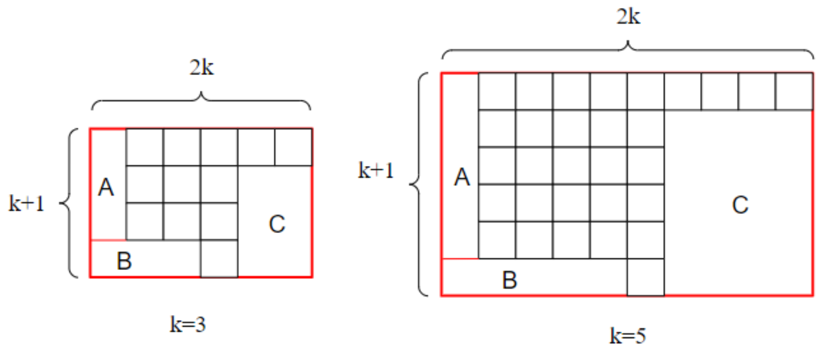
Nous appellerons cette région-type Γ. Puisque sa construction est valable pour tout k naturel supérieur à 1, on l'appellera pour un k donné: Γ_k. Nous l'avons appelée "région-type", car c'est un type de régions dont le principe est adaptable $\forall k \in [\![2;+\infty[\![$.

Montrons que cette région-type ne peut être remplie que d'une seule manière. Tout d'abord, l'espace supérieur droit, n'ayant que 1 case de hauteur, ne peut être rempli que par un domino horizontal. Ensuite, l'espace en bas à droite, lui, ne fait aussi que 1 case de large. Il ne peut donc être rempli que par un domino horizontal, comme sur le schéma suivant:



Ainsi, il ne reste de vide qu'une nouvelle région de $(k-1)$ par k. Or, selon la question 1, il n'y a pour ce type de sous-grille qu'une seule façon d'être remplie, avec des dominos tous verticaux. Ainsi, pour tout k supérieur ou égal à 2, il n'existe qu'une seule façon de remplir la région-type Γ_k.

Montrons à présent qu'il est possible $\forall k \in [\![2;+\infty[\![$ d'intégrer Γ_k dans une grille carrée aux côtés multiples de k. Nous partons pour un k quelconque dans l'intervalle précédemment défini, d'une région avec sa sous-configuration Γ_k. Nous allons maintenant placer, si c'est possible, des dominos de Laetitia autour, de telle sorte à obtenir une grille de n par n, avec k divise n, telle que Γ_k soit la seule région à remplir. Pour commencer, essayons de placer Γ_k dans un rectangle, le plus serré possible. Pour ce faire, imaginons un rectangle de $2k$ par $(k+1)$ autour de Γ_k, comme représenté sur le schéma suivant, et voyons si l'on peut le remplir:



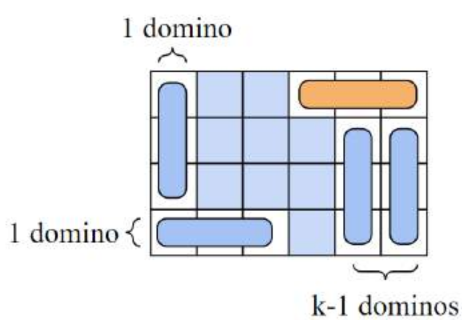
Nous découpons les espaces vides de telle sorte à avoir 3 rectangles. Il nous faut donc remplir les 3 sous-grilles A, B et C. Déterminons pour commencer leurs dimensions.
Nous appellerons L_A, L_B et L_C les largeurs de ces grilles, et h_A, h_B et h_C leurs hauteurs respectives.
Résolvons donc le système suivant pour les largeurs:

$$\begin{cases} 2k = L_A + k + (k-1) \\ L_C = k-1 \\ L_B + 1 + L_C = 2k \end{cases} \iff \begin{cases} L_A = 1 \\ L_C = k-1 \\ L_B = k \end{cases}$$

Puis le système suivant pour les hauteurs:

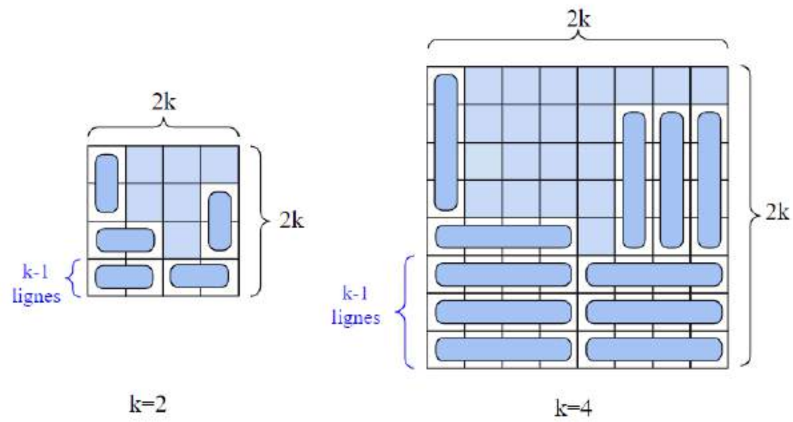
$$\begin{cases} h_A = k \\ h_A + h_B = k+1 \\ h_C + 1 = k+1 \end{cases} \iff \begin{cases} h_A = k \\ h_B = 1 \\ h_C = k \end{cases}$$

Ainsi, on obtient les couples de dimensions suivants: pour A: 1 par k, pour B: k par 1, pour C: k par $k-1$. Ainsi, $\forall k \in [\![2; +\infty[\![$, la zone A ne peut être remplie que par un domino vertical, la B par un domino horizontal. La zone C quant à elle, correspond à une sous-grille "petite" comme dans la question 1, qui ne peut donc être remplie que par $k-1$ dominos verticaux.



Ici, les cases bleutées représentent les cases vides de Γ_k.

Nous avons donc montré qu'il était possible pour Laetitia $\forall k \in [\![2; +\infty[\![$, de construire une sous-grille rectangle de $k+1$ par $2k$, avec une région Γ_k comme seule région. k étant supérieur ou égal à 2, il n'existe aucun k dans lequel $k+1$ soit un multiple de k. La sous-grille que nous avons formé ne peut donc pas être une grille de jeu. Il faut donc en faire un carré. Puisque sa largeur est de $2k$, et sa hauteur de $(k+1)$, nous n'avons qu'à ajouter $2k-(k+1)$ lignes en dessous de la sous-grille, et à les remplir avec 2 dominos horizontaux par ligne, c'est à dire $k-1$ lignes de 2 dominos, comme sur le schéma suivant:

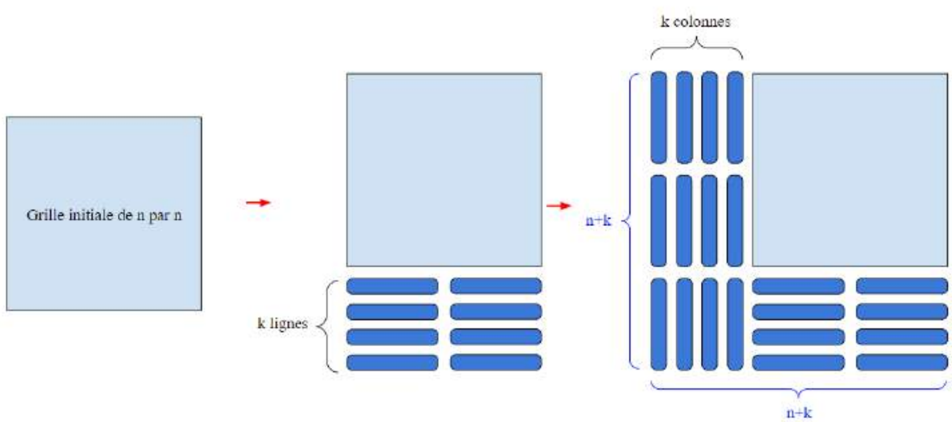


En effet, une ligne de $2k$ cases de largeur est toujours complétable par 2 dominos horizontaux.

Ainsi, nous avons prouvé que $\forall k \in [\![2; +\infty[\![$, il existe au moins une configuration de départ de grille avec $n = 2k$ telle qu'elle ait un carré de k par k vide, mais qu'elle ne puisse être complétée par le joueur que d'une seule manière.

Théorème 7:

Montrons désormais que $\forall k \in [\![2; +\infty[\![$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, avec n un multiple de k, il existe au moins une configuration initiale pour grille de dimensions $n + k$ par $n + k$, telle qu'elle ait autant de carrés de k par k vides et le même nombre de façons d'être complétée.
Partons d'une grille quelconque de n par n, avec $k \in \mathbb{N}$ qui divise n. Rajoutons en dessous de cette grille k lignes de n/k dominos horizontaux. A présent ajoutons à gauche de cette grille k colonnes de $n/k + 1$ dominos verticaux. Il en résulte donc une grille de $n+k$ par $n+k$ avec toujours autant de régions, disposées de la même façon, le même nombre de cases vides, et qui est remplissable du même nombre de façons.



Exemple avec $k = 4$ et $n = 2k$

Il existe donc pour toute configuration initiale de grille de n par n quelconque multiple de $k \in [\![2; +\infty[\![$, au moins une configuration initiale de grille de $n + k$ par $n + k$ qui ait les mêmes régions et le même nombre de façons d'être complétée.

2.5.2 Réponse à la question:

On rappelle P_1, pour k et n donnés: "Si Laetitia laisse au moins un carré de k par k vide, alors il y a toujours au moins deux façons de compléter la grille de côté n."

D'après le théorème 6, il existe pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$ au moins 1 configuration initiale de grille de dimensions $2k$ par $2k$ qui invalide la proposition P_1. Choisissons donc un k quelconque de cet intervalle, et montrons que la proposition est invalidée pour tous les n multiples de k, supérieurs à $2k$.

Raisonnement par récurrence:

Initialisation
Comme dit précédemment, il existe au moins une configuration initiale de grille de dimensions $2k$ par $2k$ qui invalide P_1.

Hérédité
Supposons que pour un n quelconque multiple de k il existe une configuration initiale de grille, telle qu'elle invalide la proposition P_1. D'après le théorème 7, il existe donc une grille de $n+k$ par $n+k$ qui ait les mêmes régions que celle-ci, et le même nombre de possibilités de remplissage. Ainsi, P_1 est donc aussi invalidée pour $n+k$.

Synthèse Ainsi, d'après l'axiome de récurrence, il existe pour tout n multiple de de k, $n \geq 2k$ une configuration initiale de grille qui invalide P_1.

Il nous reste à traiter à présent seulement le cas où $n = k$. Dans ce cas, si Laetitia laisse un carré de k par k vide, c'est la grille entière qu'elle laisse vide. Or comme nous l'avons vu précédemment, un carré de k par k isolé peut toujours être rempli de 2 manières.

Conclusion et réponse:
Ainsi, si Laetitia décide de laisser vide au moins un carré de k par k, il n'est pas toujours sûr qu'il y ait au moins 2 façons de remplir la grille. Pour tous les k supérieurs ou égaux à 2 et pour tous les n multiples de k supérieurs à $2k$, il est en effet possible qu'il n'y ait qu'une façon de remplir la grille.
En revanche, pour tout k supérieur à 2, si $n = k$, alors il y aura toujours 2 façons de remplir la grille.

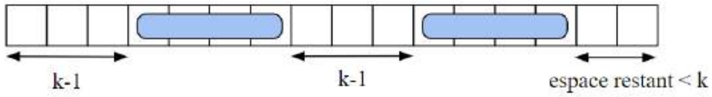
2.6 Reprise de la question 2

Nous cherchons ici à savoir combien Laetitia peut placer au minimum de dominos pour que le joueur n'ait qu'une seule façon de remplir la grille.

Cas général où $k > 2$:
En utilisant la contraposée du théorème 4:

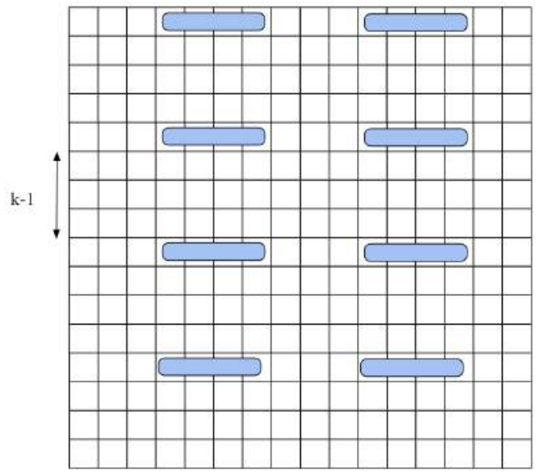
$$\forall i \in I^2(k;n), k \neq 2, \text{ absence de carré vide de } k \text{ par } k \Longrightarrow p(i) = 1.$$

nous pouvons dire qu'il suffit à Laetitia de ne laisser aucun carré de k par k vide.
Voyons une méthode permettant d'y arriver. Partons de la première ligne, remplissons là avec des dominos en laissant entre 2 dominos successifs un espace de $k-1$ cases, comme ceci:



Exemple avec $k = 3$.

Nul besoin de répéter cette opération sur toutes les lignes, mais en suivant la même logique de la répéter uniquement toutes les k lignes, c'est à dire en laissant un espace de $k-1$ entre chaque, on obtient une configuration comme ceci:



Exemple d'une grille sans carrés vides avec $k = 4$.

Précision: Comme pour les lignes, si l'espace restant est constitué de plus de k lignes, on en remplit alors une ligne, pour éviter qu'il n'y ait de carré de k par k vide.

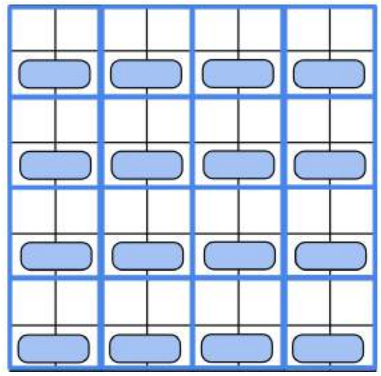
Ainsi, puisque les écarts entre 2 dominos proches, la distance est toujours de $k-1$ cases, il n'est donc pas possible d'y trouver de carré de k par k vide. Puisque $k-1$ est la plus grande distance que l'on puisse laisser entre des dominos pour empêcher la présence de carrés de k par k, on en déduit que cette configuration-type est celle qui utilise le moins de dominos pour ne laisser qu'une possibilité de placement au joueur.
Il reste maintenant à déterminer combien de dominos sont utilisés pour former cette configuration type. Sur chaque ligne remplie, on place un domino toutes les $k+(k-1)$ cases, et si l'espace restant est constitué d'un nombre de cases compris entre k et $k+(k-1)$ strictement, alors on en place un domino en plus dans cet espace restant. On place donc sur une ligne $E(\frac{n}{(k-1)+k})$, et l'on rajoute un domino si l'espace restant est plus grand ou égal à k, c'est à dire E($\frac{reste(n;(k-1)+k)}{k}$, qui est égal à E($\frac{n-(k-1+k)\times E(\frac{n}{(k-1)+k})}{k}$).
En sommant, on obtient pour une ligne un nombre de domino de:

$$E(\frac{n}{(k-1)+k}) + E(\frac{n-(k-1+k)\times E(\frac{n}{(k-1)+k})}{k})$$

Comme on remplit autant de lignes qu'on ne place de dominos sur une ligne, il y a dans la grille autant de dominos que le carré de l'expression précédente. Ainsi, le minimum de dominos que peut placer Laetitia pour faire en sorte de ne laisser au joueur qu'une façon de remplir la grille est:

$$(E(\frac{n}{(k-1)+k}) + E(\frac{n-(k-1+k)\times E(\frac{n}{(k-1)+k})}{k}))^2$$

Cas particulier où $k = 2$
Dans ce cas, le théorème 5 ne s'applique pas mais nous pouvons utiliser la contraposée du théorème 4, selon laquelle pour n'avoir qu'une possibilité de remplissage, il faut qu'il n'y ait ni carré de k par k vide, ni boucle. En remplissant comme précédemment la grille, on ferait apparaître des boucles autour des dominos qui seraient posés seuls, sans voisins. Pour empêcher non seulement les carrés vides, mais aussi les boucles, il faut donc placer les dominos de telle façon à remplir intégralement une ligne sur 2, ce qui donne un nombre total de dominos de $\frac{n}{k} \times \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2k}$. L'écart de 1 ligne sur 2 est le plus grand que l'on puisse laisser sans faire apparaître de carrés vides, et l'écart de 0 entre les dominos d'une même ligne est le plus grand que l'on puisse avoir pour empêcher la formation de boucles autours des dominos.

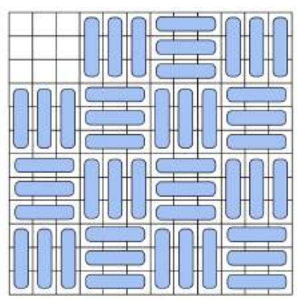


Exemple avec $n = 8$ d'une grille ainsi remplie.

2.7 Reprise de la question 3:

Nous cherchons à présent le nombre maximum de dominos que Laetitia peut placer pour qu'il reste au joueur au moins 2 façons de remplir la grille.

Cas où $k > 2$
Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la réciproque du théorèmes 5 ne fonctionne que pour les carrés de k par k isolés. Il faut donc que Laetitia laisse uniquement un carré de k par k vide. Ainsi pour placer le plus possible de dominos, il suffit que Laetitia en pose sur toutes les autres cases.
Ainsi, si Laetitia laisse le carré supérieur gauche vide par exemple, elle peut remplir tous les autres carrés de k par k par des dominos, comme sur le schéma suivant:



Exemple avec $k = 3$ et $n = 12k$

Il nous faut donc savoir combien de dominos peuvent être ainsi placés. Dans la grille, il y a au total $\frac{n^2}{k}$ dominos. Dans le carré laissé vide, il y a la place pour k dominos. Ainsi, Laetitia peut donc placer jusqu'à $\frac{n^2}{k} - k$ dominos tout en laissant au joueur 2 façons de remplir la grille.

Cas où $k = 2$
Dans le cas où $k = 2$, on peut utiliser la réciproque du théorème 4 qui nous indique que pour avoir 2 possibilités de remplissage, il faut avoir un carré vide isolé, ou alors une boucle. Avec $k = 2$, un carré de k par k isolé vide ne prend que 2 dominos. Une boucle ne peut nécessiter moins de 2 dominos pour être réalisée. Ainsi, en utilisant la même logique que pour le cas général, on peut affirmer que le nombre maximum de dominos que Laetitia peut placer dans une grille où $k = 2$ est aussi $\frac{n^2}{k} - k$.

3 Question 5

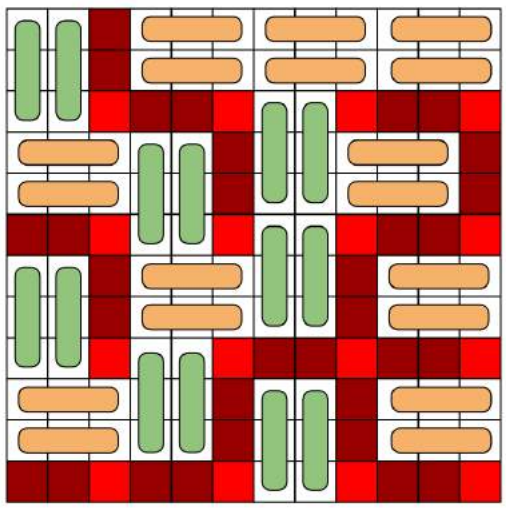
Pour répondre à cette question, nous aurions pu utiliser les théorèmes 4 et 5, qui nous disent que de telles grilles sans carrés vides de k par k, du moins pour les $k > 2$, ne peuvent être remplissables que d'une seule manière. Toutefois, nous avons décidé, pour nous en convaincre plus pleinement, et pour avoir une meilleure compréhension du problème, de répondre à la question différemment.

3.1 Notations

Nous utiliserons dans cette question les notations suivantes:
- Un point d'un domino est une partie de ce domino qui occupe une case. Ainsi chaque domino possède k points.
- 2 dominos sont voisins ssi ils ont au moins 1 point juxtaposé
- Une région de la grille est un ensemble de cases juxtaposées, qui ne sont pas séparées par les dominos posés par Laetitia. Une grille a une ou plusieurs régions, et elle ne communiquent pas entre elles.
- $I_c(k;n)$ l'ensemble des grilles de départ laissées par Laetitia telles qu'elles sont complétables, avec une extrémité de domino sur chaque case colorée. Bien sûr $I_c(k;n) \subset I^2(k;n)$.

3.2 Représentations graphiques

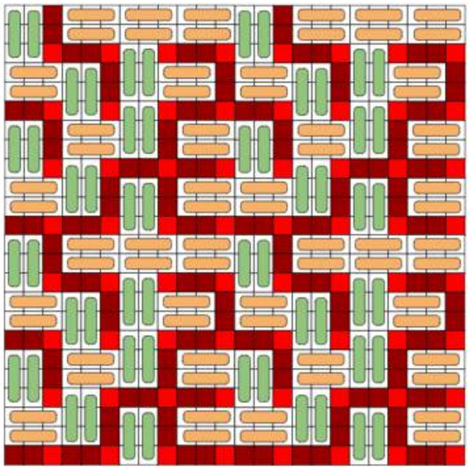
Dans la suite de cette question, nous représenterons les carrés coloriés en rouge, et les dominos placés par Laetitia en marron. Les dominos à placer par le joueur, eux, seront verts s'ils sont verticaux, et oranges si horizontaux.



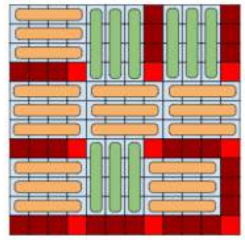
Exemple d'une grille complétable et complétée, avec $n = 12$ et $k = 3$.

3.3 Le problème

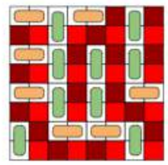
La question nous invite à nous demander pour quelles valeurs de n et k il peut exister plusieurs façons de compléter la grilles. En essayant de nombreuses configurations de n et k, nous ne trouvons aucune association qui donne plus d'une possibilité de remplissage. Voici quelques exemples:



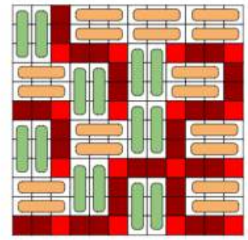
n=24 ; **k**=3



n=12 ; **k**=4



n=8 ; **k**=2



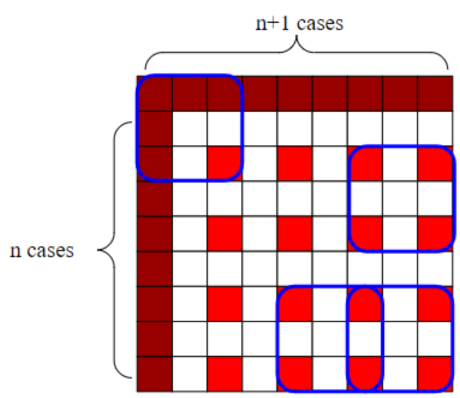
n=12 ; **k**=3

Théorème 8: Avec sur chaque case colorée une extrémité de domino, si le puzzle est complétable, alors il ne l'est que d'une seule manière.

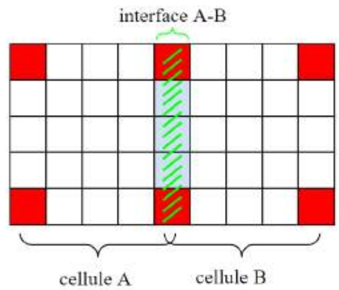
Nous pouvons déjà faire une première remarque: sur ces exemples, tous les dominos sont groupés par groupes de $k-1$ dominos juxtaposés parallèles.
Puisque chaque case aux coordonnées multiples de k est remplie par un bout de domino, il ne peut exister dans ces grilles de sous-grilles $k \times k$ vide comme ce pouvait être le cas dans les questions précédentes.

3.4 Cellules de la grille

Nous appellerons cellules les sous-grilles de dimensions $(k+1) \times (k+1)$ dont la case inférieure droite est colorée. Pour que ces cellules soient définissables aussi sur les bordures du haut et de gauche, nous étendrons la grille, en rajoutant une colonne de n cases à gauche, et une ligne de $n+1$ cases en haut, toutes remplies de dominos imaginaires de 1×1.



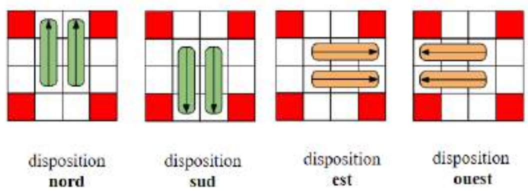
Exemple de grille vide avec $n = 12, k = 2$, et 4 cellules entourées en bleu.



2 cellules voisines d'une grille avec $k = 4$.

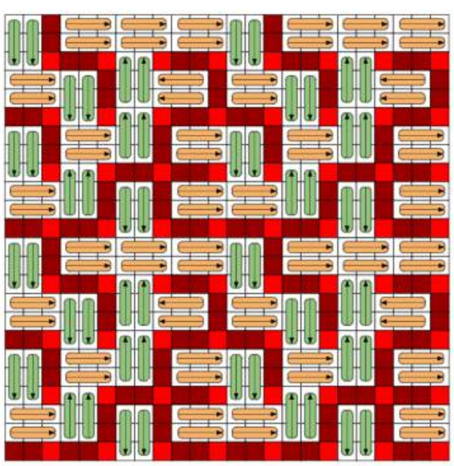
Ce schéma met en évidence la partie commune entre 2 cellules, nous appellerons ces parties communes les interfaces.
Une cellule possède 2 voisines si elle est en coin de grille, 3 si elle est en bordure sans être sur un coin, et 4 si elle est à l'intérieur de la grille.

Étudions les positions des groupes de $k-1$ dominos précédemment remarqués, par rapport aux cellules. Dans nos précédents exemples, nous pouvons observer que ces "paquets de dominos", comme nous les appellerons désormais, sont toujours centrés dans les cellules, et n'en débordent jamais. En effet, chaque domino est placé avec $k-1$ de ses points dans l'intérieur d'une cellule, et 1 point sur l'interface de la cellule. C'est à dire qu'ils ne sont disposés que de 4 façons différentes, représentées par ce schéma:

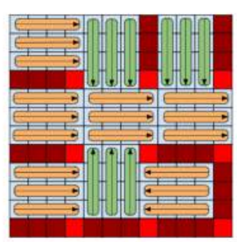


4 positions possibles d'un paquet de dominos dans une cellule avec $k = 3$.

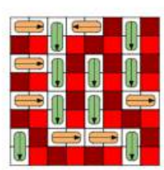
Bien qu'il reste encore à prouver que les dominos ne peuvent être placés que dans ces positions, le fait qu'ils le soient dans nos exemples précédents nous permet de rajouter sur ces derniers les flèches correspondant à l'orientation des dominos:



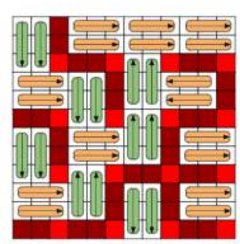
n=24 ; **k**=3



n=12 ; **k**=4

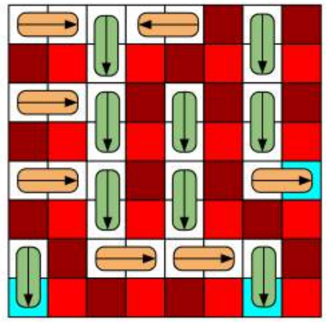


n=8 ; **k**=2



n=12 ; **k**=3

On observant attentivement ces exemples, on se rend compte d'une chose: dans chaque région de la grille, les dominos semblent suivre un chemin. En effet, deux paquets de dominos voisins n'ont jamais de directions opposées. Si l'on essaye de suivre le chemin que semblent suivre ces dominos, on en arrive à déterminer les cases qui en sont à l'arrivée:



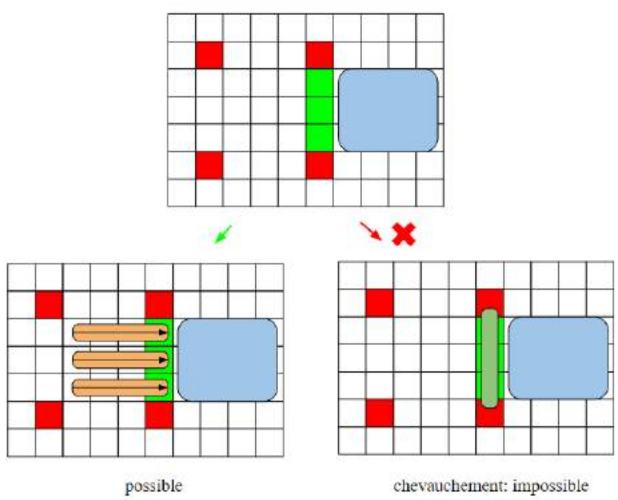
Grille remplie avec $k = 2, n = 8$

On peut alors faire une nouvelle remarque: les dernières cases des chemins suivis par les dominos de chaque région sont situées soit en bordures de droite soit en bordure du bas. Cette observation vaut aussi pour les exemples précédent.
Il semble donc que chaque région soit connectée à une bordure du bas ou de droite.

Lemme 5: $\forall i \in I_c(k;n)$ chaque région est connectée à au moins une bordure droite ou du bas.

3.5 Remplissage de la grille

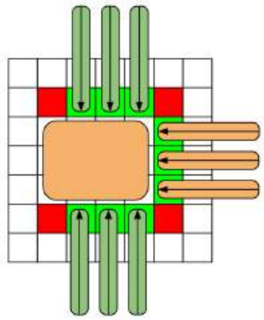
En remplissant la grille, le joueur est confronté à des situations où il n'a qu'une possibilité de placer des dominos. C'est le cas lorsqu'une cellule est remplie de dominos, mais que une ou plusieurs de ses interfaces sont vides, comme sur le schéma suivant, où une cellule remplie par des dominos de direction quelconque a son interface de gauche vide.



$k = 4$

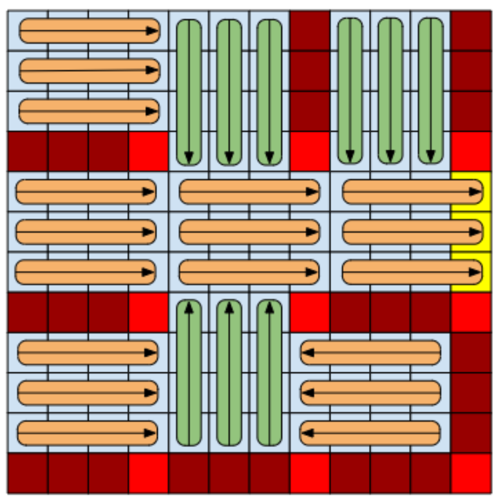
Sur ce schéma, les dominos placés par Laetitia ne sont pas visibles, ils peuvent être dans toutes les positions possibles, tant qu'ils laissent l'interface verte vide. Les cases rouges néanmoins sont nécessairement considérées comme remplies.

En effet dans cette situation, l'interface verte est vide. Comme elle ne mesure que $k-1$ de hauteur, car les cases colorées sont remplies par chacune 1 point de domino posé par Laetitia, il est impossible d'y placer un domino vertical pour la remplir. En revanche, ce qui est possible, et ainsi nécessaire, est d'y placer les dominos horizontalement. Les dominos sont alors comme "aspirés" pour combler cette interface vide.
Le même raisonnement s'applique pour toutes les interfaces vides de la cellule remplie, de gauche, du haut et du bas.
Ainsi, une cellule remplie par un paquet de dominos dans une orientation quelconque "aspire" les dominos sur toutes ses interfaces vides.



Cellule remplie ayant 3 interfaces vides, $k = 4$

Nous avons donc prouvé un lemme de l'aspiration, qui nous servira plus tard. Ce lemme fonctionne aussi pour les bordures de droite et du bas. En effet, ces bordures agissent comme des cellules remplies dont les interfaces sont soit remplies, soit vides, en fonction des positions des dominos placés par Laetitia. Sur le schéma suivant par exemple, l'interface cellule-bordure colorée en jaune "aspire" les dominos, les forçant à s'y placer horizontalement.



$k = 4, n = 12$

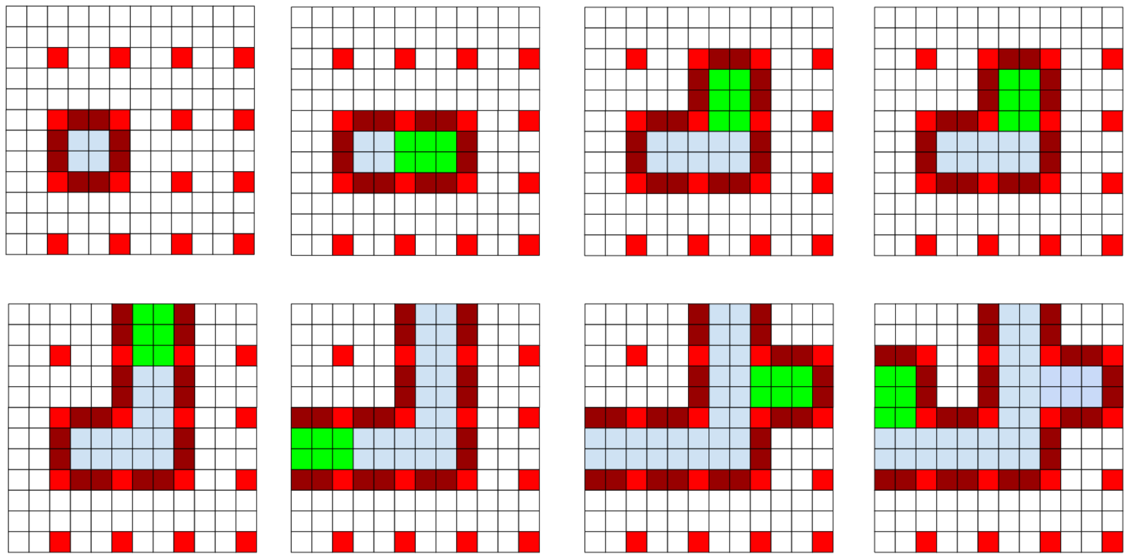
Ainsi ce phénomène "d'aspiration" contraint les dominos à s'organiser par paquets et dans une orientation précise, et ce, d'une seule façon possible.

3.6 Démonstrations

3.6.1 Lemme 5

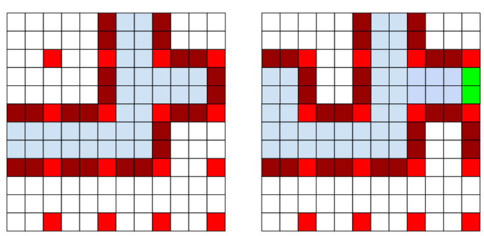
Nous devons prouver que toutes les régions d'une grille remplissable quelconque remplie uniquement par Laetitia, est connectée à au moins une bordure de gauche ou de droite.
Pour ce faire plaçons nous dans le rôle de Laetitia, et créons une région en posant les dominos sur une grille quelconque.

Partons d'une région la plus petite possible, c'est à dire d'une seule cellule seulement, avec tous ses murs fermés. Sa surface est donc de $(k-1)^2$ cases. Imaginons alors que cette région s'étende jusqu'à une autre cellule voisine, située à l'intérieur de la grille. Alors, la surface totale de la région augmente de la surface de la nouvelle cellule, minorée de la surface occupée par les dominos qui l'entourent. C'est à dire de $(k+1)^2-(k+1)-(k+1)-(k-1)=(k+1)(k-1)-(k-1)=k(k-1)$. Le schéma suivant illustre ce processus:



$k=3, n=12$

Ainsi à chaque cellule de plus, peu importe où elle est située, la région augmente sa surface de $k(k-1)$ cases.
Ainsi, la surface totale d'une telle région sans interface avec les bordures de droite ou du bas est donnée par: $S=(k-1)^2+c\times k(k-1)$, avec $c\in\mathbb{N}$ le nombre de cellules occupées par la région.
Intéressons-nous désormais à ces bordures de droite et du bas. Lorsque la région s'étend vers l'une de ces interfaces, c'est à dire si aucun mur ne la bloque, alors la surface totale de la région augmente de la surface de cette interface, c'est à dire de $k-1$ cases, comme sur le schéma suivant:



$k=3, n=12$

Ainsi, la surface de toute région de toute grille quelconque est donnée par la formule suivante:

$$S=(k-1)^2+c\times k(k-1)+b\times(k-1)$$

où $b\in\mathbb{N}, b\leq(\frac{n}{k})^2$ est le nombre d'interface de la région en contact avec une bordure du bas ou de droite.

Condition de complétabilité:

Maintenant que nous connaissons la surface de toutes régions possibles dans une grille, nous pouvons utiliser un des critères nécessaires de la complétabilité pour voir quelles régions sont complétables. En effet, pour qu'une région soit complétable, il faut nécessairement que sa surface soit un multiple de k, sinon, impossible de placer un nombre entier de domino dans la région, c'est à dire sans chevauchement.
Ainsi il faut:

$S \equiv 0[k]$, i.e $(k-1)^2 + c \times k(k-1) + b \times (k-1) \equiv 0[k]$.
Déjà, $c \times k(k-1)$ est multiple de k, donc $S \equiv 0[k] \iff (k-1)^2 + b \times (k-1) \equiv 0[k]$
Développons cette expression:
$S \equiv 0[k] \iff k^2 - 2k + 1 + bk - b \equiv 0[k]$
Cela permet de simplifier les termes multiples de k: $S \equiv 0[k] \iff 1 - b \equiv 0[k]$
Or le problème pose, $k > 1$ donc $k \neq 1$. Ainsi, b ne peut être nul; auquel cas la surface S de la région ne serait pas un multiple de k. Toute région complétable a donc au moins une interface en contact avec la bordure de droite ou du bas.

3.6.2 Théorème 8:

Nous allons maintenant démontrer que toute grille laissée complétable par Laetitia, avec un bout de domino sur chaque case colorée, n'est complétable que d'une seule manière.
Soit $i \in I_c(k;n)$.
Tout d'abord, d'après le lemme 5, chaque région de la grille est connectée à au moins une interface avec la bordure de droite ou du bas.
Or, d'après le lemme d'aspiration, on ne peut placer dans ces interfaces en question les dominos que d'une seule manière. De plus, une fois le premier paquet de dominos posé dans l'interface, se crée un phénomène d'aspiration comme décrit précédemment, suite auquel, successivement, toutes les cellules, de voisine en voisine à partir de la première en interface, ne peuvent être remplies que d'une seule manière, comme l'indique le lemme d'aspiration.
Ainsi, toutes les régions de la cellule ne peuvent être remplies que d'une seule manière.

3.7 Conclusion:

Ainsi, d'après le Théorème 8, il n'existe aucun couple $(k;n)$ d'entiers naturels, avec k divise n, tel qu'il puisse y avoir plus d'une façon de compléter la grille, si sur chaque case colorée est posée une extrémité de domino. Soit Laetitia ne pose des dominos que sur les cases colorées, soit elle en pose d'autres en plus. Dans les 2 cas, une fois que les cases colorées sont remplies, il n'y a qu'une seule façon de remplir la grille, si elle est complétable.