Eté 2022

Travaux à préparer pour assurer une entrée sereine en Mathématiques Spécialité et en Mathématiques Expertes

Bonjour à tous,

Nous demandons aux élèves qui se sont engagés dans la poursuite de l'enseignement de *Spécialité Mathématiques* et/ou qui ont fait le choix de l'enseignement de *Mathématiques Expertes* de préparer la rentrée de septembre en faisant une « remise en jambes » mathématiques en fin d'été.

Comme indiqué dans le titre de ce document, notre but est de vous assurer une rentrée sereine et efficace dans les enseignements susnommés.

Nous savons que vous pouvez être dubitatif quant à l'assurance de votre assimilation de vos connaissances de Première abordées pendant la période de confinement. Sachez que, lorsque vous en aurez le besoin et que vous nous l'aurez exprimé, nous prendrons le temps nécessaire pour revoir et confirmer vos connaissances vues en confinement. Nous avons construit nos cours ainsi que la progression annuelle en conséquence.

Les travaux demandé pour cet été ont été conçus pour être réalisés en une seule semaine, ou au maximum 10 jours, entre 1h et 2h par jour (cela ne dépend que de vous et notamment de l'assimilation du chapitre que nous vous demandons de réviser).

Pour être efficace, cette préparation de la rentrée doit à faite selon le rythme évoqué ci-dessus, à la fin de l'été, idéalement la dernière semaine d'Aout.

Evidemment, pour être efficace, il est indispensable que ces travaux soient réalisés en totale autonomie : pas de cours particulier avec qui que ce soit, professeur ou étudiant…de la stricte recherche personnelle… éventuellement, en tout dernier recours, un œil dans internet. Eventuellement quelques maigres conseils d'ainés (étudiants ou famille), ces conseils étant les plus maigres possibles.

- Un travail de révision :
  Revoir, uniquement à partir de vos notes de cours et d'exercices de Première, le chapitre sur les « Suites ».
  Il dépend de la qualité de votre assimilation initiale du cours et des compétences, et aussi de vos souvenirs, de pouvoir évaluer le temps consacré à ces révisions. Vos professeurs de Première estiment que cela peut être fait en une semaine à raison d'une heure par jour. Il s'agit d'être parfaitement au point sur les connaissances de cours, et aussi de maitriser les exercices que vous avez résolus en classe ou à la maison, particulièrement ceux qui ont été donnés lors des devoirs en temps limités.

- Un travail sur la rédaction des mathématiques :
  Il s'agit de préparer le chapitre 0 de Terminale Spécialité intitulé « Eléments de Logique & Raisonnements » dont les deux documents **à imprimer en recto simple (pas en recto-verso)** sont : le COURS (11 pages) et les EXERCICES (2 pages) qui se trouvent à la suite de ce courrier.
  Nous estimons que cette deuxième partie du travail peut être réalisée avec 1 heure maximum par jour. Peut-être moins si vous avez effectué une année de Première correcte.
  Ce travail se fait en deux parties imbriquées l'une dans l'autre.
  - Le COURS : le lire, le comprendre jusqu'au paragraphe 324 inclus. Il faudra rédiger sur feuilles (pas dans un cahier) les exemples des paragraphes 224, 321, 322, 323 et 324. La fin du POLYCOURS (le paragraphe 33) contient des nouveautés du programme de Terminale que nous aborderons ensemble en cours.
  - Les EXERCICES, il s'agit de rédiger certains exercices. Nous vous invitons à lire ce document *avant* de travailler le POLYCOURS, car pour chaque exercice, il est décrit à partir de quel paragraphe du POLYCOURS vous pourrez travailler/préparer ces exercices.

A la rentrée, nous reprendrons rapidement le chapitre sur les « Eléments de Logique & Raisonnements » car vous avez déjà manipulé ces notions en Seconde et spécialité de Première. Des compléments d'explications seront rapidement apportés en fonction de vos besoins, les exemples et exercices corrigés. Le chapitre n° 1 sera celui des « Suites » qui s'appuie totalement sur les connaissances et compétences de Première.

Pour préserver la sérénité de la rentrée, nous ne relèverons pas les travaux que nous vous demandons de préparer ; de la même façon, nous n'évaluerons pas la qualité de vos révisions sur les « suites » en faisant une interrogation à la rentrée.

Il en va de votre seule responsabilité d'effectuer ou non ces travaux, ainsi que de la qualité de la confection de ces travaux. Plus vous serez exigeants à l'assimilation des connaissances et compétences de ces chapitres, plus vous serez exigeants quant à la rédaction des exercices, plus cela sera efficace pour vous et votre réussite en cours de maths dès le début de l'année.

Impatients de vous retrouver en septembre prochain, nous vous souhaitons de belles vacances, reposantes, sereines et pleines de joies et découvertes,

Vos professeurs de Mathématiques en Terminale
S Fertin, H Senoune

Logique & Raisonnements

Avant donc que d'écrire, apprenez à penser (Chant I)

Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement,
Et les mots pour le dire arrivent aisément. (Chant I)

Hâtez-vous lentement, et sans perdre courage,
Vingt fois sur le métier remettez votre ouvrage,
Polissez-le sans cesse, et le repolissez,
Ajoutez quelquefois, et souvent effacez. (Chant I)

Nicolas BOILEAU (1636 – 1711)
<u>Art Poétique</u>

✂--

✂---

1 Quelques éléments de vocabulaire indispensables pour comprendre

Ci-dessous sont rappelées la définition de certains mots utilisés couramment, voire très couramment en mathématiques ; si vous faites l'effort de vous en souvenir, cela vous permettra d'avoir les idées plus claires et surtout de lever certaines ambigüités mathématiques élémentaires sur lesquelles vous butez.

Ces définitions ont été choisies dans les dictionnaires *Larousse* et *Reverso*. Ces dictionnaires ont été choisis de façon tout à fait arbitraire. D'autres dictionnaires auraient pu être choisis, cela aurait peut-être affiné ce catalogue, mais cela aurait été au risque de complexifier inutilement la compréhension.

De plus, pour certains mots, il a été choisi arbitrairement de ne pas donner toutes les définitions et de limiter à ce qu'il faut comprendre par rapport aux sciences, aux mathématiques en particulier, et à la philosophie éventuellement.

11 Qu'est-ce qu'une DÉFINITION ?

● D'après le *Larousse* :

1) Fait de déterminer les caractéristiques d'un concept, d'un mot, d'un objet, etc…
2) Ensemble des propriétés essentielles de quelque chose.

● D'après le Reverso :

Fait de fixer le sens de quelque chose avec précision.

12 Qu'est-ce qu'un AXIOME ?

● D'après le *Larousse* :

1) Enoncé évident et non démontrable.
2) Énoncé indiscuté, admis comme base d'une construction intellectuelle, sociale, morale, etc… vérité admise par tous sans discussion.

● D'après le *Reverso* :

Principe de base, d'évidence, non démontrable.

13 Qu'est-ce qu'une HYPOTHÈSE ?

● D'après le *Larousse* :

1) *Sciences exactes* : Dans la logique traditionnelle, proposition particulière, comprise comme implicite à la thèse, ou incluse à celle-ci ; dans la logique moderne, formule figurant en tête d'une déduction et qui, à la différence d'un axiome, n'a qu'un caractère transitoire.
2) *Sciences expérimentales* : Proposition visant à fournir une explication vraisemblable d'un ensemble de faits, et qui doit être soumise au contrôle de l'expérience ou vérifiée dans ses conséquences.
3) *Sciences humaines* : Supposition, conjecture portant sur l'explication de faits passés ou présents ou sur la possibilité de survenue d'événements futurs.

● D'après le *Reverso* :

1) *Sciences exactes* : Postulat de base servant à la démonstration d'un théorème.
2) *Sciences expérimentales* : Proposition avancée provisoirement qui doit être contrôlée ultérieurement.
3) *Philosophie, Sciences humaines* : Postulat de base servant à la démonstration d'une théorie.

14 Qu'est-ce qu'un THÉORÈME ?

● D'après le *Larousse* :

Proposition scientifique qui peut être démontrée.

● D'après le *Reverso* :

Proposition démontrable découlant d'autres propositions déjà démontrées

✂---

15 Qu'est-ce qu'une THÉORIE ?

● D'après le *Larousse* :

1) Ensemble organisé de principes, de règles, de lois scientifiques visant à décrire et à expliquer un ensemble de faits : *« La théorie de la relativité »*.
2) Ensemble relativement organisé d'idées, de concepts se rapportant à un domaine déterminé : *« Une théorie littéraire »*.
3) Système d'hypothèses sous-tendant les interprétations des événements : *« C'est votre théorie, mais ce n'est pas sûr »*.
4) Connaissance purement spéculative : *« Il y a loin de la théorie à la pratique »*.

● D'après le *Reverso* :

1) Ensemble de concepts, des lois, des théorèmes d'un système scientifique.
2) Ensemble des idées, des intuitions concernant un domaine particulier.
3) Construction intellectuelle non vérifiée par les faits.

16 Qu'est-ce qu'une DÉMONSTRATION ?

● D'après le *Larousse* :

1) Action de démontrer, de rendre évidente la vérité d'une loi scientifique, d'un raisonnement, d'une donnée objective
2) Chez Descartes, raisonnement mathématique qui, procédant du plus simple au plus complexe, parvient à montrer la vérité de propositions déduites d'autres propositions déjà admises comme vraies.

● D'après le *Reverso* :

1) Fait de prouver la vérité d'une donnée, d'une formule.
2) Raisonnement qui établit la vérité d'une proposition.

17 Qu'est-ce qu'une CONJECTURE ?

● D'après le *Larousse* :

1) Supposition fondée sur des probabilités, mais qui n'est pas contrôlée par les faits ; présomption, hypothèse : *« On est réduit à des conjectures sur ses motivations »*.
2) Hypothèse formulée sur l'exactitude ou l'inexactitude d'un énoncé dont on ne connaît pas encore de démonstration.

● D'après le *Reverso* :

1) Supposition fondée sur des probabilités ou des estimations, sans base scientifique.
2) Supposition, hypothèse, prédiction.

18 Qu'est-ce qu'un ÉNONCÉ ?

● D'après le *Larousse* :

1) Action, fait d'énoncer quelque chose : *« L'énoncé d'un jugement »*.
2) Termes dans lesquels on formule quelque chose ; texte : *« Se reporter à l'énoncé d'un acte judiciaire »*.
3) Ensemble des données d'un problème, d'une proposition, d'une relation qui est à démontrer.

● D'après le *Reverso* :

1) Acte d'énoncer, d'exprimer en termes nets.
2) Formule, ensemble de formules exprimant quelque chose (l'énoncé d'un problème de mathématique, d'un texte de loi).

19 Qu'est-ce qu'un PROBLÈME ?

● D'après le *Larousse* :

1) Point sur lequel on s'interroge, question qui prête à discussion, qui fait l'objet d'argumentations, de théories diverses, en particulier dans le domaine de la connaissance : *« Le problème de l'origine de l'homme »*.
2) Question à résoudre par un raisonnement scientifique et constituant un exercice : *L'énoncé du problème*.
3) Question à résoudre dans un domaine quelconque, qui se présente avec un certain nombre de difficultés, d'obstacles : *« Le problème de la faim dans le monde »*.

● D'après le *Reverso* :

1) Difficulté, ennui, danger
2) Enigme, colle, question, interrogation

✂---

2 Quelques éléments de Logique

21 Proposition, Axiome, Théorème, Lemme, Corollaire, Conjecture

211 Définition : *Proposition*

- Une *proposition* est un énoncé dont on doit pouvoir dire s'il est vrai ou faux.

On notera *V* pour vrai, *F* pour faux : ce sont les deux seules « valeurs » logiques possibles d'une proposition.
D'après *L'Axiome du Choix* une proposition est vraie ou bien fausse, elle ne peut être les deux à la fois. (*)

212 Exemples

- « 25 est la somme de deux carrés d'entiers naturels » est une proposition vraie.
- « La Terre est plate » est une proposition fausse.
- « Monsieur François Hollande est le président de La République Française en 2016 » est une proposition vraie.
- « $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel » est une proposition fausse.
- « 2016 est un nombre premier » est une proposition fausse.

213 Définition : *Axiome*

- Un *axiome* est une proposition qui peut être déclarée vraie a priori. Un *axiome* est aussi une proposition indémontrable.

Si une proposition n'est pas un axiome, la véracité ou la fausseté de la proposition doit faire l'objet d'une démonstration.
Dans un cours de mathématiques, en dehors des axiomes, toutes les propositions énoncées sont vraies et leur véracité est démontrée.

214 Définitions : *Théorème, Lemme, Corollaire, Conjecture*

- Un *théorème* est une proposition vraie particulièrement importante.
- Un *lemme* est une proposition vraie, utile à la démonstration d'une proposition plus importante, en général appelée théorème.
- Un *corollaire* est une proposition vraie, conséquence immédiate d'une autre proposition vraie.
- Une *conjecture* est une proposition qu'on estime probablement vraie, sans en avoir de démonstration.

215 Exemples

- « Le Théorème de Pythagore ».
- « La Conjecture de Goldbach » : tout entier naturel pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers.
- « La conjecture de Fermat » énoncée au XVII^e siècle est devenue en 1994 « Le Théorème de Fermat-Willes ».
- « L'axiome d'Archimède » : tout nombre réel peut être encadré par deux nombres entiers consécutifs.

22 Opérations sur les propositions

A partir de propositions existantes, à l'aide d'opérations, on va pouvoir créer de nouvelles propositions et établir leur véracité.

221 Opérations : *Négation, Disjonction, Conjonction, Implication, Equivalence*

Soit *P* et *Q* deux propositions.

- La *négation* : « non *P* » notée $\overline{P}$.
- La *disjonction* : « *P* ou *Q* » notée $P \vee Q$.
- La *conjonction* : « *P* et *Q* » notée $P \wedge Q$.
- L'*implication* : la proposition « *P* implique *Q* » notée $P \Rightarrow Q$.
- L'*équivalence* : la proposition « *P* équivaut à *Q* » notée $P \Leftrightarrow Q$.

NB : les symboles $\wedge$ et $\vee$ pour signifier « et » et « ou » entre deux propositions, ne sont a priori pas à utiliser; le but est de ne pas tomber dans l'excès de symboles, le but est de rester sobre dans l'usage des symboles afin rester compréhensible. **Il s'agit de savoir communiquer efficacement un texte et une idée mathématique entre un écrivain-émetteur et un lecteur-récepteur : à votre niveau, la maitrise des quantificateurs suffit à atteindre cet objectif ; il vous est donc demander d'utiliser les mots « et » et « ou » pour faire comprendre la conjonction et la disjonction.**

(*) : Kurt GÖDEL (1906 – 1978) montra en 1931 que dans tout système logique il existe des propositions indécidables : il n'est pas possible de savoir si elles sont vraies ou si elles sont fausses. C'est ce que l'on appelle *les théorèmes d'incomplétudes* : tout système logique est incomplet, car il contient en lui de l'indécidable.

✂---

222 Tables de vérité des opérations logiques

Négation	
P	Non P
V	F
F	V

Disjonction		
P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjonction		
P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Implication		
P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Equivalence		
P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

223 Remarques

• D'une façon moins formelle, on peut résumer les tables de vérité par quelques remarques :

1) La proposition « non P » est vraie lorsque P est fausse, et inversement.
2) La proposition « P ou Q » est vraie lorsque au moins l'une des deux propositions P ou Q est vraie.
3) La proposition « P et Q » est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies.
4) La proposition « $P \Rightarrow Q$ » est vraie lorsque Q est vraie ou lorsque P est fausse (le « Faux » implique n'importe quoi).
5) La proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.

• Les opérations précédentes peuvent être répétées et étendues pour former des propositions dépendantes de trois, quatre… propositions initiales.

• Des propositions sont dites *synonymes* lorsqu'elles ont une même table de vérité.

224 Exemples

Montrer avec les tables de vérités les synonymies suivantes :

1) $P \Leftrightarrow Q$ avec $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
2) non $(P$ et $Q)$ avec $(\text{non } P)$ ou $(\text{non } Q)$
3) non $(P$ ou $Q)$ avec $(\text{non } P)$ et $(\text{non } Q)$
4) $P \Rightarrow Q$ avec non $(P$ et $(\text{non } Q))$
5) $P \Rightarrow Q$ avec $((\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P))$

Indication : par exemple, pour la question 1), construire la table de vérité de « $P \Leftrightarrow Q$ » et celle de « $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ », puis comparer les.

✂---

23 Contraposée et Réciproque d'une implication

231 Définitions

Soient P et Q deux propositions.

- La proposition « $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ » est la *contraposée* de la proposition « $P \Rightarrow Q$ ».
- La proposition « $Q \Rightarrow P$ » est la *réciproque* de la proposition « $P \Rightarrow Q$ ».

232 Remarques

• L'exemple 5 du paragraphe 224, montre qu'une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité : elles sont, ou bien toutes les deux vraies, ou bien toutes les deux fausses.
• Une implication et sa réciproque peuvent avoir des valeurs de vérité différente : l'une peut être vraie alors que l'autre ne l'est pas.

✂---

24 Les quantificateurs

Dans tout ce paragraphe, *E* est un ensemble non vide.

241 Définitions : *quantificateur universel, quantificateur existentiel*

• Quantificateur universel :
Il est noté par un A renversé (A comme « Alle » en allemand qui se traduit par « tous ») : $\forall$; il se lit « pour tout », « quel que soit ».

• Quantificateur existentiel :
Il est noté par un E renversé (E comme « existieren » en allemand qui se traduit par « exister ») : $\exists$; il se lit « il existe ».

• Quantificateur existentiel d'unicité :
Le ! qui suit le $\exists$, indique que l'objet dont on affirme l'existence est unique : $\exists !$ se lit « il existe un unique ».

242 Exemples

• $\forall x \geq 2,\ x^2 \geq 4$: signifie que tous les nombres supérieures ou égaux à 2 ont leur carré supérieur ou égal à 4.
• $\exists a \in \mathbb{R},\ a^2 + 4a + 3 = 0$: signifie qu'il existe un ou plusieurs réels *a* tels que $a^2 + 4a + 3 = 0$
• $\forall x \geq 0,\ \exists ! y \geq 0,\ y^2 = x$: signifie que, quel que soit le réel positif, il existe un seul et unique autre réel dont le carré est égal au premier réel.

243 Proposition avec des quantificateurs

Soit *P* une proposition portant sur des éléments d'un ensemble *E*.

• La proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » signifie que tout élément de l'ensemble *E* vérifie la proposition *P*.
• La proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » signifie qu'il existe au moins un élément de l'ensemble *E* qui vérifie la proposition *P*.
• La proposition « $\exists ! x \in E,\ P(x)$ » signifie qu'il existe un seul élément de l'ensemble *E* qui vérifie la proposition *P*.

244 Quelques précautions dans l'utilisation des quantificateurs

Première précaution : Ordre de lecture des quantificateurs dans une proposition.

On peut former des propositions « à tiroirs » avec plusieurs quantificateurs, notamment dans des énoncés à plusieurs variables. Dans ce cas, il faut faire très attention à l'ordre de lecture des quantificateurs notamment lorsqu'il y a alternance de $\forall$ et de $\exists$.

Ainsi les propositions $\begin{cases} \forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) \\ \exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y) \end{cases}$ ont souvent des significations différentes.

Par exemple : $\begin{cases} A : \text{Pour tout nourrisson, il existe une femme telle qu'elle est la mère du nourrisson} \\ B : \text{Il existe une femme telle que pour tout nourrisson, elle est la mère du nourrisson} \end{cases}$. En effet, la proposition *A* est une évidence de la nature, la proposition *B* est une absurdité.

Autre exemple : $\begin{cases} A : \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{N},\ y > x \\ B : \exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y > x \end{cases}$. En effet, la proposition *A* – qui exprime que pour tout réel, il existe au moins un entier strictement plus grand que ce réel – est évidemment vraie. Alors que, la proposition *B* – qui exprime qu'il existe un entier naturel plus grand que tous les réels – est évidemment fausse.

✂--

245 Quelques précautions pour une bonne rédaction

On considère la proposition : « tout réel est la puissance troisième d'un nombre réel ».

On pourra tout aussi bien écrire : « Pour tout réel x, il existe un réel y telle que $y = x^3$ ».
ou encore : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^3$ »

En revanche, on n'écrira jamais : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = x^3$ »
ou encore : « $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = x^3$ ».

Le programme dit explicitement : « *l'emploi de quantificateur en guise d'abréviations est exclu* ». Cette exigence du programme tient au fait que l'écriture mathématique n'est pas une abréviation de la langue courante, mais un quasi-langage avec sa « grammaire » et sa « syntaxe ».

Pour une bonne rédaction, le mieux est de distinguer les modes dans lequel on écrit le texte : il faudra distinctement utiliser le « mode texte » (en bon français) et le « mode mathématique » (avec les quantificateurs).

246 Négation d'une proposition avec quantificateur

Soit P une proposition portant sur les éléments d'une ensemble E.

- La négation de la proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » est la proposition « $\exists x \in E$, non $P(x)$ ».
- La négation de la proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » est la proposition « $\forall x \in E$, non $P(x)$ ».

Remarque : bien qu'il a été signalé au §235 de ne pas mélanger le français avec le symbolique mathématique, il a été fait ce choix quant à la négation d'une proposition. La symbolique de la négation existe, il s'agit de « $\neg$ » . En l'occurrence, la négation de « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \neg P(x)$ », ce qui n'est pas nécessairement facile à décoder à la lecture.

25 Produit cartésien d'ensembles

251 Définition

Soient E et F deux ensembles,

On appelle *« produit cartésien de E et F »* l'ensemble, noté « $E \times F$ », des couples $(x; y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

NB : cette notation peut être généralisée avec autant d'ensembles que l'on souhaite.

252 Remarques et exemples

- Ce produit est qualifié de « cartésien » car c'est René Descartes (1596 – 1650) qui a inventé cette notation.
- L'ensemble des triplets de réels se note $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou plus simplement $\mathbb{R}^3$.
- L'ensemble des couples de nombres réels strictement positifs se note $]0;+\infty[^2$ ou encore $\mathbb{R}^{+*2}$.
- La proposition « $\forall (x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $|x|.y \geq 0$ » signifie que « le produit de la valeur absolue d'un entier relatif et de n'importe quel entier naturel est positif ».

26 Conditions *nécessaires* et/ou *suffisantes*

On considère deux propositions P et Q.
On suppose de plus que la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est vraie.
Cela arrive dans les trois cas du tableau ci-contre.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
F	V	V
F	F	V

✂--

261 Définitions : *Condition nécessaire, Condition suffisante*

Soient P et Q deux propositions.

Pour exprimer que la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, on dit indifféremment que :

- La proposition P est une *condition suffisante* de la proposition Q.
- Pour que la proposition Q soit vraie, *il suffit* que la proposition P le soit.
- Q est vraie ***SI*** P est vraie.

- La proposition Q est une *condition nécessaire* de la proposition P.
- Pour que la proposition P soit vraie, *il faut* que la proposition Q le soit.
- P est vraie **SEULEMENT SI** Q est vraie.

262 Définition : *Condition nécessaire et suffisante*

Soient P et Q deux propositions.

Pour exprimer que la proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie, on dit indifféremment que :

- La proposition P est une *condition nécessaire et suffisante* (CNS) de la proposition Q.
- La proposition P est vraie *si et seulement si* la proposition Q est vraie.
- Pour que la proposition P soit vraie, *il faut et il suffit* que la proposition Q soit vraie.

3 Raisonnements classiques

31 Quelques conseils importants pour bien rédiger

Dans le raisonnement logique, la syntaxe est primordiale ; elle est d'ailleurs indissociable de la clarté du style.

Quelques bonnes habitudes doivent être prises :

- Indiquer clairement les hypothèses de la démonstration et quel résultat on cherche à obtenir.

Si on veut prouver que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on commencera par écrire : « supposons P, et montrons Q ».

A partir de l'hypothèse P, on procède par implications et conditions nécessaires successives, toutes vraies, pour finalement prouver que la proposition Q est vraie.

Attention : on prouve ici que Q est vraie *si P est vraie*, et non pas que Q est vraie dans l'absolu (càd sans hypothèse) ; c'est pourquoi la conclusion d'un tel raisonnement n'est pas « on a donc montré que Q est vraie », mais est plutôt « on a donc montré que si P est vraie, alors Q est vraie »

- Mettre en valeur les liens logiques entre les propositions successives de la démonstration. Le symbole $\Rightarrow$ n'est pas innocent : son emploi doit être justifié, argumenté.

- Ne pas mélanger les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$. Si un raisonnement cherche à prouver que $P \Rightarrow Q$, alors ce raisonnement ne doit contenir aucune équivalence.

- Eviter l'emploi exclusif du langage formel (proposition, quantificateurs) là où on peut s'exprimer en français. Parfois le langage formel permet une efficacité de l'écriture, parfois la formulation en français éclairci la compréhension.

- Varier le style, pour éviter toute sécheresse. Le symbole $\Rightarrow$ peut être remplacé par « si… alors…. », « donc », « ainsi », « par conséquent », « on en déduit que », « d'où » etc…

- Soit P une proposition portant sur les éléments d'un ensemble E.

Si on veut montrer la proposition« $\forall x \in E, P(x)$ », on commence par écrire : « Soit x un élément de E, montrons que x vérifie la proposition P ». Le fait de fixer un élément x n'est ici pas restrictif tant que cet élément reste en effet quelconque dans E.

Le « Soit x » est important car il installe la démonstration : il crée et il nomme un objet précis de E sur lequel on va pouvoir travailler, à partir duquel on va pouvoir construire une réflexion.

L'emploi du « soit », impératif du verbe « être » est indispensable : il met en valeur l'existence de x ; l'expression « x un élément de E » est tout autant indispensable : il précise la nature de x, il met en valeur « l'essence » de x.

Cette façon de penser/agir doit vous rappeler le premier livre de *La Bible*, en l'occurrence *Le Livre de la Genèse, verset n°3* :

Dixit que Deus : « Fiat lux, et facta est lux »

Et Dieu dit : « Que la lumière soit, et la lumière fut »

C'est exactement ce que vous faites lorsque vous écrivez : « Soit x un réel » ou encore « Soit f une fonction » ; vous faites exister un objet, et vous précisez sa nature.

✂---

32 Quelques raisonnements usuels

Soient P et Q deux propositions.

321 Raisonnement *modus ponens*

Si la proposition P est vraie, et si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors la proposition Q est vraie.

Exemple : Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$; montrer que $x \geq 2$ et $|y| \geq 3 \Rightarrow \frac{-1}{3} < \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} \leq \frac{7}{12}$

✂---

322 Raisonnement par contraposition

L'équivalence suivante est vraie : $(P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad ((\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P))$

La démonstration de cette équivalence a été faite §224 exemple 5.

Exemple : Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

✂---

323 Raisonnement par l'absurde

L'équivalence suivante est vraie : $(P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad \text{non } (P \text{ et } (\text{non } Q))$

La démonstration de cette équivalence a été faite §224 exemple 4.

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

✂---

324 Raisonnement par le contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit de trouver un cas qui ne vérifie pas cette proposition.

Exemples :
1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 4$; montrer que f est ni paire ni impaire.

2) Montrer que la proposition « $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \geq 1$ » est fausse.

✂---

33 Le raisonnement par récurrence

331 L'objectif

On utilise *le raisonnement par récurrence* lorsqu'on cherche à démontrer qu'une proposition dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout n supérieur à un entier n_0 donné dans l'énoncé.

332 L'axiome de récurrence

La proposition à démontrer étant dépendante de n, on la note $\mathcal{P}(n)$.

SI la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n_0

ET

SI pour UN entier n naturel fixé $n \geq n_0$, « $\mathcal{P}(n)$ vraie » implique « $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie »

ALORS pour TOUS les entiers naturels $n \geq n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

✂---

333 Pratique du raisonnement par récurrence

Le raisonnement se construite en 4 étapes indispensables : 1) Enonciation de la proposition, 2) Initialisation, 3) Hérédité 4) Synthèse.

1) On énonce clairement la proposition $\mathcal{P}(n)$ qu'il s'agit de démontrer.

2) Initialisation :
Il s'agit de démontrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie lorsque *n* vaut n_0.
Il s'agit en général d'une vérification très simple ; on fera cependant attention à ne pas affirmer plutôt que de démontrer.

3) Hérédité :
Il s'agit de démontrer que pour un entier *n* naturel fixé $n \geq n_0$, « $\mathcal{P}(n)$ vraie » implique « $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ».
Et comme cela est clairement indiqué ci-dessus, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour UN entier naturel $n \geq n_0$ fixé quelconque, puis on démontre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. L'hypothèse « $\mathcal{P}(n)$ vraie » est appelée « hypothèse de récurrence ».

4) Synthèse :
Il s'agit de faire le bilan du travail accompli et de conclure ; par exemple : « la proposition mathématique $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour $n = n_0$ et est héréditaire lorsque $n \geq n_0$, donc, d'après l'axiome de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n* tel que $n \geq n_0$ ».

334 Exemples

Exemple 1 :
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$; montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 6 + \frac{3}{2^n}$.

✂---

Exemple 2 :
Montrer que quel que soit l'entier naturel *n*, $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.

✂---

Exemple 3 :
On considère la somme S_n telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{p=0}^{n} p^2$; montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

✂---

Exemple 4 :
a) Utiliser Geogebra pour comparer $(1+x)^n$ et $1 + n \times x$ lorsque $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer par récurrence l'inégalité obtenue en a).

✂---

Exemple 5 :
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où *f* est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$.

On admet que *f* est croissante sur $]-1;+\infty[$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2$.

b) Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$? On pourra tout d'abord établir une conjecture que l'on démontrera.

✂---

EXERCICES

<u>Exercice 1 :</u> *Après le paragraphe 221 du POLYCOURS.*

Les propositions ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? Justifier sans calculatrice.

a) Tous les multiples de 2 sont multiples de 8.
b) Tous les diviseurs de 6 sont diviseurs de 18.
c) Le carré de la somme de deux nombres réels est égal à la somme des carrés de chacun d'eux.
d) Toute équation du second degré admet au moins deux racines réelles.
e) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}$

✂---

<u>Exercice 2 :</u> *Après le paragraphe 223 du POLYCOURS.*

Compléter le tableau suivant avec $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$:

N°	Proposition P	Connecteur logique	Proposition Q
1	$a>0$ et $b>0$		$ab>0$
2	$a>0$ et $b>0$		$a+b>0$
3	$x\geq 0$ et $x^2=1$		$x=1$
4	$(x+7)(x-4)=0$		$x=4$
5	$x>5$		$x\geq 3$
6	La Terre est plate		La Terre tourne autour du Soleil
7	$x\in\mathbb{N}$ et $x>5$		$x\in\mathbb{N}$ et $x\geq 6$
8	$MA=MB$		M est le milieu de $[AB]$
9	$x^2\in[-2;9]$		$x\in[-2;3]$
10	$x\in[-1;2]$		$x\in[-2;3]$
11	$EF=GH$		$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}$
12	L'eau de mer est salée		Les poules n'ont pas de dent
13	$-1>1$		$100>10$
14	$x<4$		$x\leq 4$

✂---

<u>Exercice 3 :</u> *Après le paragraphe 232 du POLYCOURS.*

Voilà quatre phrases :

A : S'il pleut, alors je prends mon parapluie.
B : S'il ne pleut pas, alors je ne prends pas mon parapluie.
C : Si je prends mon parapluie, alors il pleut.
D : Si je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas.

a) Lesquelles de ces phrases ont le même sens ?

On note P : « il pleut » et Q : « je prends mon parapluie ».

b) Les écrire avec P et Q et les opérateurs logiques.
c) Que sont les phrases B, C et D pour la phrase A ?

✂---

Exercice 4 : *Après le paragraphe 246 du POLYCOURS.*

Donner en français la négation des phrases suivantes :

a) Tous les habitants du 92 habitent une maison.
b) Tous les habitants d'Asnières sur Seine n'ont pas de voiture.
c) A Sainte Geneviève, il existe un élève qui a eu 20 à l'écrit de Français en juin 2019.
d) A Sainte Geneviève, il n'existe pas d'élève qui ait eu à passer l'oral de rattrapage au baccalauréat.

ATTENTION : la « forme négative » d'une proposition est un exercice grammatical consistant à changer la *forme* d'une phrase : l'action a donc lieu sur la forme grammaticale de la proposition.
La « négation » d'une proposition ou d'une phrase consiste à donner une proposition exprimant une situation contraire à celle décrite par la proposition : l'action a donc lieu sur le sens de la proposition.
✂---

Exercice 5 : *Après le paragraphe 262 du POLYCOURS.*

Soient *I* un intervalle de $\mathbb{R}$ et *f* une fonction définir sur *I*.

Recopier les propositions mathématiques ci-dessous et exprimer en français ce qu'elles signifient (attention, il ne s'agit pas de donner une lecture littérale des symboles lus) :

a) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) = a$.
b) $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I,\ f(x) = y$.
d) $\forall (x;y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

✂---

Exercice 6 : *Après le paragraphe 262 du POLYCOURS.*

Soient *I* un intervalle de $\mathbb{R}$ et *f* une fonction définie sur *I*.

Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions ci-dessous :

a) La fonction *f* s'annule sur *I*.
b) La fonction *f* est la fonction nulle.
c) La fonction *f* présente un minimum.
d) La fonction *f* est une fonction constante.
e) La fonction *f* ne prend jamais deux fois la même valeur.
f) La fonction *f* prend des valeurs arbitrairement grandes.
g) La fonction f ne s'annule qu'une seule fois sur I.
h) la négation de la proposition a).
i) la négation de la proposition b).
j) la négation de la proposition d).
k) la négation de la proposition g).

Indication : des croquis peuvent vous aider à répondre aux questions ; pour les questions h à k, on pourra s'aider en formulant d'abord la proposition demandée en français.
✂---

Exercice 7 : *Après le paragraphe 262 du POLYCOURS.*

Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Indiquer la différence de sens entre les deux propositions proposées :

5a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = y$ et $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$
5b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$ et $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = y$
5c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$ et $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$
✂---

Exercice 8 :

L'idée de cet exercice est de généraliser les identités : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Soient a et b deux réels quelconques.

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n - b^n = (a-b) \times \left(\sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-1-p} \right)$.

Indication : on pourra utiliser lorsque l'on en aura besoin l'égalité $a^{n+1} - b^{n+1} = a\left(a^n - b^n\right) + b^n (a-b)$

2) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, rappeler la valeur de $\sum_{p=0}^{n} x^p$

b) En déduire l'égalité de la question 1.

✂---